Geometria analítica no espaço

10.º Ano | Matemática B | 4 páginas | 12 exercícios

Competências que desenvolve: Ler coordenadas num referencial cartesiano ortonormado, obter ponto médio e simetrias no espaço, identificar planos paralelos aos planos coordenados, escrever as equações de retas paralelas a um dos eixos e visualizar situações tridimensionais (modelação com tecnologia 3D).

Revisão rápida

- **No espaço** cada ponto tem três coordenadas (x, y, z): x e y são as do plano, z a altura.
- **Planos coordenados:** xOy é o de z = 0 · yOz o de x = 0 · xOz o de y = 0 — um plano paralelo fixa *uma* coordenada (ex.: z = 5).
- **Reta paralela a um eixo** fixa as *duas* coordenadas: ∥ a Oz → {x = a, y = b} (z livre).
- **Ponto médio e simetrias** funcionam coordenada a coordenada, como no plano.

Exercícios

1. A(2, −1, 3) · B(0, 4, −2) · P(3, 0, 2) · Q(−1, 5, 0) · R(0, 0, −4). a) sobre que plano ou eixo está P? __ b) e Q? __ c) e R? __ d) que coordenada está anulada em cada um deles?

2. a) ponto médio de A(1, −2, 4) e B(5, 0, −2) __ b) confirma coordenada a coordenada c) o que tem de comum um ponto médio no espaço e um no plano? (1 frase)

3. Simetrias de A(2, 3, −1): a) em relação ao plano xOy __ b) em relação à origem __ c) em relação ao plano xOz __ — que coordenada troca de sinal em cada caso?

4. Planos: a) y = 5 é paralelo a qual plano coordenado? __ b) x = −3? __ c) z = 0 é que plano? __ d) x + y = 2 é paralelo a um plano coordenado? Justifica.

© 2026 Estudantices

5. Retas paralelas a um eixo (escreve as equações): a) ∥ a Oz passando por (2, −1, 4) __ b) ∥ a Ox passando por (0, 3, −2) __ c) ∥ a Oy passando por (4, 0, 1) __ d) o que significa «z livre»? __

6. Ponto M(3, −2, 5). a) pertence ao plano y = −2? __ b) pertence à reta {x = 3, y = −2}? __ c) que reta ∥ a Oz passa por M? __ d) que plano coordenado contém M? (com a coordenada nula) — atenção: alguma? __

7. Cubo de aresta 2 com vértices A(0,0,0) · B(2,0,0) · C(2,2,0) · D(0,2,0) e os respetivos A'(0,0,2) · B'(2,0,2) · C'(2,2,2) · D'(0,2,2). a) vértice oposto a A __ b) ponto médio de A e B' __ c) que aresta é paralela a Oz e tem x = 2, y = 2? __

8. Modelação (impressão 3D): a cabeça da impressora está em (12, 8, 3) (cm). a) onde fica a sua projeção na base (plano z = 0)? __ b) depois de subir 5 cm, que coordenadas tem? __ c) o plano de trabalho z = 3 contém a posição inicial? __

9. Liga cada equação ao objeto: (plano paralelo a xOz · plano paralelo a yOz · plano xOy · reta ∥ a Oy · reta ∥ a Oz)
a) y = 2 → __ b) {x = 1, z = 4} → __ c) z = 0 → __ d) x = 5 → __ e) {x = 2, y = −3} → __

© 2026 Estudantices

10. Condições no espaço: a) $x > 0 \land y > 0 \land z > 0 \rightarrow$ __ b) $z < 0 \rightarrow$ __ c) $x = 2 \land y = 2 \rightarrow$ __ (atenção: três coordenadas!) d) $z = 0 \land x \geq 0 \land y \geq 0 \rightarrow$ __

11. Navegação: uma aeronave passa de (2, 5, 300) para (2, 5, 1200) (coordenadas em km e altitude em metros). a) que coordenadas se mantêm? __ b) que movimento descreve? __ c) em que plano está a projeção do trajeto? __

12. Produção: explica em 3 frases a diferença entre a reta $\{x = 2, y = -1\}$ e o plano $x = 2$, indicando uma situação de cada um no teu quotidiano (pensa em edifícios, fios ou andares).

© 2026 Estudantices

Soluções — Geometria analítica no espaço

1. a) P está sobre o plano **xOz** b) Q sobre o plano **xOy** c) R sobre o eixo **Oz** d) P: y = 0 · Q: z = 0 · R: x = 0 e y = 0.

2. a) ((1+5)/2, (−2+0)/2, (4−2)/2) = **(3, −1, 1)** b) (1+5)/2 = 3 ✓ · −2/2 = −1 ✓ · 2/2 = 1 ✓ c) (modelo) É sempre a média das respetivas coordenadas — só acrescenta a terceira.

3. a) **(2, 3, 1)** — troca o sinal de z b) **(−2, −3, 1)** — trocam todos c) **(2, −3, −1)** — troca o sinal de y. Regime: o plano refletido anula/troca a coordenada que o define.

4. a) **xOz** (é lá que y fica constante) b) **yOz** c) **plano xOy** d) **não** — as duas variáveis aparecem somadas com coeficientes diferentes de zero, logo o plano é inclinado em relação aos três.

5. a) **{x = 2, y = −1}** b) **{y = 3, z = −2}** c) **{x = 4, z = 1}** d) (modelo) A coordenada z pode valer qualquer valor — a reta estende-se sem limite ao longo de Oz.

6. a) **sim** (y = −2) b) **sim** (x = 3 e y = −2; z = 5 livre) c) **{x = 3, y = −2}** d) **nenhum** — nenhuma coordenada de M é nula; M está «em suspensão» no espaço.

7. a) **C'(2, 2, 2)** b) ((0+2)/2, (0+0)/2, (0+2)/2) = **(1, 0, 1)** c) a aresta **CC'** — de C(2, 2, 0) a C'(2, 2, 2): as duas extremidades têm x = 2 e y = 2.

8. a) **(12, 8, 0)** — ou seja, o ponto (12, 8) da base b) **(12, 8, 8)** c) **sim** — a altura inicial é exatamente z = 3.

9. a) **plano paralelo a xOz** b) **reta ∥ a Oy** c) **plano xOy** d) **plano paralelo a yOz** e) **reta ∥ a Oz**.

10. a) o **primeiro octante** (todos os lados positivos) b) metade do espaço por baixo do plano xOy c) uma **reta paralela a Oz** — x e y estão fixados d) o quarto do plano xOy com x e y não negativos (1.º quadrante do plano).

11. a) **x = 2 e y = 5** b) subida vertical (só a altitude muda) c) o plano xOy (o ponto (2, 5) mantém-se em todos os instantes).

12. (modelo) A reta {x = 2, y = −1} é um fio vertical que atravessa todos os andares de um edifício com coordenadas fixas de planta. O plano x = 2 é a parede inteira que passa por essa coordenada, estendendo-se em y e em z. Um fixa duas coordenadas (corta numa linha), o outro fixa uma (corta numa superfície).

© 2026 Estudantices