Modelos matemáticos nas eleições e na partilha

10.º Ano | Matemática B | 4 páginas | 12 exercícios

Competências que desenvolve: Distinguir maioria simples e maioria absoluta, aplicar os métodos de Borda, D'Hondt e St. Lagué, ler um algoritmo de distribuição de mandatos (pensamento computacional) e comparar vantagens e limitações dos métodos de escolha e de partilha.

Revisão rápida

- **Maioria simples:** vence quem tem *mais votos que qualquer outro* — mesmo sem chegar a 50% dos válidos.
- **Maioria absoluta: ma = ⌊n/2⌋ + 1** sobre a base fixada (válidos, presentes ou inscritos) — sem ela, o sistema costuma obrigar a uma 2.ª volta.
- **Borda:** boletins de *ordenação*; cada posição vale pontos (2/1/0) e vence quem soma mais — valoriza quem é amplamente aceite.
- **D'Hondt vs. St. Lagué:** dividem os votos por sequências de divisores (1, 2, 3… / 1, 3, 5…). No D'Hondt o 2.º mandato é mais barato para quem tem muitos votos; no St. Lagué as listas pequenas entram mais depressa.

Exercícios

1. Define maioria simples e maioria absoluta e dá um exemplo numérico de cada uma (com 3 candidatos).

2. Eleição com 640 votos válidos: A = 318 · B = 301 · C = 21. a) quantos votos garantem a maioria absoluta? __ b) que percentagem obteve A (2 casas)? __ c) venceu por maioria simples? __ — e por maioria absoluta? __ d) quantos votos faltaram a A? __

3. Assembleia: 110 inscritos, 87 presentes; votos: A = 43 · B = 31 · C = 13. a) maioria absoluta dos *presentes* __ b) maioria absoluta dos *inscritos* __ c) com a regra dos presentes, A é eleito? __ d) com a regra dos inscritos? __ — porque é que a base de contagem muda o resultado? (1 frase)

4. Borda (2/1/0): 5 eleitores, candidatos P, Q, R — 3 boletins P > Q > R e 2 boletins Q > R > P. a) pontos de P __ Q __ R __ b) vencedor por Borda __ c) quem teve a maioria dos primeiros preferidos? __ d) o que mostra esta divergência? (1 frase)

© 2026 Estudantices

5. Borda — princípios: a) que tipo de boletim se usa? __ b) quantos pontos são atribuídos *por eleitor* com 3 candidatos? __ c) porque é que um candidato que é 2.º em muitos boletins pode vencer? (1 frase) __ d) aponta uma limitação do método. (1 frase)

6. Transitividade: a) define-a __ b) com A > B e B > C, infere-se __ c) ciclo A > B > C > A: o que acontece à escolha coletiva? (1 frase) __

7. Verdadeiro ou Falso (justifica): a) «Com os mesmos votos, a maioria simples e o método de Borda podem eleger vencedores diferentes.» __ b) «Quem tem a maioria dos primeiros preferidos vence sempre em Borda.» __ — usa o ex. 4 na justificação.

8. D'Hondt — mandatos: A = 920 votos · B = 640 · C = 440 (total 2000) — 5 mandatos. a) quocientes (1 casa): A: 920 · 460 · 306,7 · 230 · 184 — B: __ — C: __ b) mandatos: A __ B __ C __ c) percentagens (1 casa): A __ B __ C __ d) qual lista ficou *acima* do proporcional (mandatos teóricos: 2,3 · 1,6 · 1,1)? __

9. Algoritmo (pensamento computacional): lê o programa e responde.

```
votos = [920, 640, 440]
mandatos = [0, 0, 0]
for i in range(5):
    q = [votos[j]/(mandatos[j]+1) for j in range(3)]
    k = q.index(max(q))
    mandatos[k] = mandatos[k] + 1
print(mandatos)
```

a) o que é impresso __ b) porque se divide por `mandatos[j]+1`? __ c) o que passa a ser impresso se `range(5)` for trocado por `range(4)`? __

© 2026 Estudantices

10. D'Hondt vs. St. Lagué: A = 100 · B = 60 · C = 41 — 3 mandatos. a) com D'Hondt (divisores 1, 2, 3): quocientes de A __ de B __ de C __ → mandatos: A __ B __ C __ b) com St. Lagué (divisores 1, 3, 5): A __ B __ C __ c) dão o mesmo resultado? __ — qual dos métodos dá um mandato à lista C? __

11. Liga cada afirmação ao método (D'Hondt · St. Lagué · Borda · maioria absoluta):
a) «exige mais de metade dos votos válidos» → __ b) «premia quem é amplamente aceite, mesmo sem liderar os primeiros preferidos» → __
c) «torna o 2.º mandato mais barato para quem já tem muitos votos» → __ d) «dá mais hipótese às listas pequenas do que o D'Hondt» → __

12. Produção: com os votos do ex. 8 (A = 920 · B = 640 · C = 440), a direção da associação pede-vos para justificar a regra usada para distribuir 5 lugares. Escreve 3 frases: 2 razões a favor do método escolhido (com exemplo numérico das tuas contas) e 1 limitação.

© 2026 Estudantices

Soluções — Modelos matemáticos nas eleições e na partilha

1. *Maioria simples:* mais votos que qualquer concorrente, mesmo sem chegar a 50% (ex.: A = 40, B = 35, C = 25 → A vence com 40%). *Maioria absoluta:* mais de metade da base contada — ma = ⌊n/2⌋ + 1 (ex.: n = 100 → 51 votos).

2. a) ma = ⌊640/2⌋ + 1 = **321** b) 318/640 = **49,69%** c) maioria **simples: sim** (318 > 301 > 21); maioria **absoluta: não** (318 < 321) d) 321 − 318 = **3 votos**.

3. a) ⌊87/2⌋ + 1 = **44** b) ⌊110/2⌋ + 1 = **56** c) **não** — 43 < 44 (falta 1 voto) d) **não** — 43 < 56 (faltam 13). (modelo) A mesma votação muda de resultado porque a base é diferente — por isso a regra deve fixar a base *antes* da votação.

4. a) P = 2+2+2+0+0 = **6** · Q = 1+1+1+2+2 = **7** · R = 0+0+0+1+1 = **2** b) **Q** c) **P**, com 3 dos 5 primeiros preferidos d) (modelo) Os métodos medem coisas distintas: os primeiros preferidos captam o voto principal, o Borda valoriza quem é aceite por muitos — por isso podem discordar.

5. a) boletim de *ordenação* completa dos candidatos b) 2 + 1 + 0 = **3 pontos** c) (modelo) soma 1 ponto em quase todos os boletins e 2 nos seus — a acumulação ultrapassa a de um candidato que lidera com minoria d) (modelo) os pontos dependem da escala escolhida e o vencedor nem sempre é o preferido face a todos os outros (ciclo).

6. a) preferência coerente: se A > B e B > C, então A > C b) **A > C** c) a escolha coletiva fica **indeterminada** — nenhum candidato é preferido a todos os outros (paradoxo de Condorcet).

7. a) **V** — ex. 4: P vence por maioria simples (3 dos 5 primeiros preferidos) e Q vence em Borda (7 > 6) b) **F** — ex. 4: P tem a maioria dos primeiros preferidos mas perde em Borda (6 < 7).

8. a) B: 640 · 320 · 213,3 · 160 · 128 — C: 440 · 220 · 146,7 · 110 · 88 b) A = **2** · B = **2** · C = **1** c) A = **46%** · B = **32%** · C = **22%** d) **B** — com 32% levou 2 mandatos (teórico 1,6); A (2,3) e C (1,1) ficaram abaixo.

9. a) `[2, 2, 1]` b) o divisor é o nº de mandatos já atribuídos + 1 — assim cada atribuição usa o quociente seguinte, mais baixo, da lista c) `[2, 1, 1]` — só há 4 atribuições (A, B, A, C): B fica com 1 em vez de 2.

10. a) A: 100 · 50 · 33,3 — B: 60 · 30 · 20 — C: 41 · 20,5 · 13,7 → melhores: 100 (A), 60 (B), 50 (A) → A = **2**, B = **1**, C = **0** b) A: 100 · 33,3 · 20 — B: 60 · 20 · 12 — C: 41 · 13,7 · 8,2 → A = **1**, B = **1**, C = **1** c) **não** — o **St. Lagué** dá o mandato a C.

11. a) **maioria absoluta** b) **Borda** c) **D'Hondt** d) **St. Lagué**.

12. (modelo) Escolho o **D'Hondt**: 1) distribui os lugares segundo os votos de cada lista — com 920/640/440 os lugares ficam 2/2/1 em vez de 5 todos para A; 2) é transparente: a fila de quocientes (ex. 8) repete-se em qualquer mesa de voto. **Limitação:** favorece as listas grandes — B (32%) sobe para 2 mandatos (teórico 1,6) e A (46%) fica nos 2 (teórico 2,3).

© 2026 Estudantices