

Ficha 4 — Teorema Fundamental do Cálculo

12.º Ano Matemática A 4 páginas 12 exercícios

Objetivo: compreender o **Teorema Fundamental do Cálculo**, que liga a derivação e a integração, e usá-lo para calcular integrais definidos através de uma primitiva (regra de Barrow).

Revisão rápida — Teorema Fundamental do Cálculo

- 1.ª parte (derivada da função integral).** Se f é contínua num intervalo I e $a \in I$, então a função $F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$ é derivável em I e $F'(x) = f(x)$. Ou seja: *derivar a função integral devolve a função inicial*.
- 2.ª parte (regra de Barrow).** Se F é qualquer primitiva de f em $[a, b]$, então $\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$. Escreve-se também $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.
- Porque «qualquer» primitiva serve:** duas primitivas de f diferem por uma constante, e essa constante **desaparece** na diferença $F(b) - F(a)$. A escolha da primitiva não influencia o valor do integral definido — usa-se por isso a mais simples (com $C = 0$).
- O que o teorema diz ao fundo:** a **derivação e a integração são operações inversas**. É este resultado que permite calcular áreas (um problema geométrico) através de primitivas (um problema algébrico).
- Cuidados de aplicação:** a função tem de ser **contínua** no intervalo de integração; se houver descontinuidades, o intervalo deve ser dividido.
- Regra prática:** para $\int_a^b f(x) \, dx$ — (i) determinar uma primitiva F de f ; (ii) calcular $F(b)$; (iii) calcular $F(a)$; (iv) subtrair, pela ordem **$F(b) - F(a)$** (inverter a ordem muda o sinal).

Exercícios

1. Enuncia as duas partes do Teorema Fundamental do Cálculo e explica em que sentido este teorema mostra que «derivar» e «integrar» são operações inversas.

2. Calcula $\int_0^2 3x^2 \, dx$, usando a regra de Barrow.

3. Calcula $\int_1^3 (2x + 1) \, dx$.

4. Calcula $\int_0^{\pi} \cos x \, dx$ e interpreta geometricamente o resultado.

5. Calcula $\int_1^2 (1/x) \, dx$ e apresenta o resultado na forma exata e arredondado a três casas decimais.

6. Calcula $\int_0^1 e^x \, dx$ e indica o valor arredondado a quatro casas decimais.

7. Calcula $\int_1^4 (1/\sqrt{x}) \, dx$, começando por determinar a primitiva da função.

8. Calcula $\int_0^1 (x^3 + 1) dx$.

9. Considera a função definida por $F(x) = \int_0^x t^2 dt$. Determina uma expressão algébrica de F , calcula $F'(x)$ e verifica que se obtém a função integranda — confirmando a 1.ª parte do Teorema Fundamental do Cálculo.

10. Calcula $\int_{-1}^1 x^2 dx$. Explica por que razão aqui o valor do integral é a área da região, ao contrário do que acontecia com x^3 .

11. Calcula $\int_0^{\pi/4} (1/\cos^2 x) dx$, sabendo que a primitiva de $1/\cos^2 x$ é $\tan x$.

12. Justificação: explica por que razão o valor do integral definido não depende da primitiva escolhida, e indica as condições de aplicação da regra de Barrow.

Soluções — Teorema Fundamental do Cálculo

1. 1.ª parte: se f é contínua em I e $a \in I$, então $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ é derivável e $F'(x) = f(x)$. 2.ª parte (Barrow): se F é uma primitiva de f em $[a, b]$, então $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. O teorema mostra que as operações são **inversas** neste sentido preciso: se se começar por integrar f e depois derivar o resultado, volta-se a obter f (1.ª parte); e para calcular um integral definido basta dispor de uma primitiva (2.ª parte). Assim, derivar e integrar desfazem uma à outra, exatamente como multiplicar e dividir.
 2. Uma primitiva de $3x^2$ é x^3 . Logo $\int_0^2 3x^2 dx = [x^3]_0^2 = 2^3 - 0^3 = 8 - 0 = 8$.
 3. Uma primitiva de $2x + 1$ é $x^2 + x$. Logo $\int_1^3 (2x + 1) dx = [x^2 + x]_1^3 = (9 + 3) - (1 + 1) = 12 - 2 = 10$.
 4. A primitiva de $\cos x$ é $\sin x$, logo $\int_0^\pi \cos x dx = [\sin x]_0^\pi = \sin \pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0$. Geometricamente, o resultado é 0 porque no intervalo $[0, \pi/2]$ a função é positiva e no intervalo $[\pi/2, \pi]$ é negativa, e as duas regiões têm áreas iguais: a área **com sinal** de uma anula a da outra. A **área geométrica** da região total seria $1 + 1 = 2$.
 5. A primitiva de $1/x$ é $\ln x$ (para $x > 0$), logo $\int_1^2 (1/x) dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 - 0 = \ln 2 \approx 0,693$. (É interessante notar que este é o valor exato, não aproximado: o integral de $1/x$ entre 1 e 2 é *definido* como sendo $\ln 2$.)
 6. $\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1 \approx 2,71828 - 1 = 1,7183$ (a quatro casas decimais).
 7. Escreve-se $1/\sqrt{x} = x^{-1/2}$; a sua primitiva é $x^{1/2}/(1/2) = 2\sqrt{x}$. Logo $\int_1^4 (1/\sqrt{x}) dx = [2\sqrt{x}]_1^4 = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1} = 2 \times 2 - 2 \times 1 = 4 - 2 = 2$.
 8. Uma primitiva de $x^3 + 1$ é $x^4/4 + x$. Logo $\int_0^1 (x^3 + 1) dx = [x^4/4 + x]_0^1 = (1/4 + 1) - 0 = 5/4 = 1,25$.
 9. Como a primitiva de t^2 é $t^3/3$, tem-se $F(x) = [t^3/3]_0^x = x^3/3 - 0 = x^3/3$. Derivando: $F'(x) = 3x^2/3 = x^2$ — que é exatamente a função integranda $f(t) = t^2$. Confirma-se assim a 1.ª parte do Teorema Fundamental do Cálculo: derivar a função integral devolve a função inicial.
 10. $\int_{-1}^1 x^2 dx = [x^3/3]_{-1}^1 = 1/3 - (-1/3) = 1/3 + 1/3 = 2/3$. Aqui o integral é a área da região porque $f(x) = x^2$ é **não negativa** em todo o intervalo $[-1, 1]$: o gráfico está sempre sobre (ou sobre) o eixo Ox , pelo que nenhuma parcela contribui negativamente e nada se cancela. No caso de x^3 , a função é negativa em $[-1, 0]$, o que fazia cancelar metade da área.
 11. Como a primitiva de $1/\cos^2 x$ é $\tan x$, tem-se $\int_0^{\pi/4} (1/\cos^2 x) dx = [\tan x]_0^{\pi/4} = \tan(\pi/4) - \tan 0 = 1 - 0 = 1$.
 12. O valor do integral definido não depende da primitiva escolhida porque duas primitivas quaisquer de f numa função **diferem por uma constante**: se F e G são primitivas de f , então $G(x) = F(x) + C$. Ora $G(b) - G(a) = [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a)$ — a constante **anula-se na subtração**. Por isso se pode escolher a primitiva mais simples (com $C = 0$) sem alterar o resultado. Condições de aplicação: f tem de ser **contínua** no intervalo $[a, b]$ (a continuidade garante que o integral existe e que o teorema se aplica); se f tiver descontinuidades dentro do intervalo, este deve ser subdividido nos troços de continuidade antes de aplicar a regra.
- Nota:** a ordem em $F(b) - F(a)$ é a origem da maioria dos erros de sinal. Escreve sempre os limites na notação $[F(x)]_a^b$ antes de substituir, e substitui o **limite superior primeiro**.