

Ficha 10 — Segunda derivada, concavidades e pontos de inflexão

12.º Ano

Matemática A

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: calcular a segunda derivada, usar o seu sinal para identificar o sentido das concavidades do gráfico, localizar pontos de inflexão (zeros da segunda derivada com mudança de sinal) e reconhecer os casos em que a segunda derivada se anula sem que exista ponto de inflexão.

Revisão rápida — segunda derivada e concavidades

- **Segunda derivada:** é a derivada da derivada, $f'' = (f')'$. Dá informação sobre a **forma** do gráfico, enquanto a primeira derivada dá informação sobre o crescimento.
- **Sentido das concavidades:** se $f''(x) > 0$ num intervalo, o gráfico tem a **concavidade voltada para cima** (a curva «sorri»); se $f''(x) < 0$, tem a **concavidade voltada para baixo** (a curva «franze»).
- **Ponto de inflexão:** ponto onde o gráfico **muda de sentido de concavidade**. Para o localizar: calcular f'' , resolver $f''(x) = 0$ e **verificar se f'' muda de sinal** nesse ponto — em x_0 tem de haver troca de sinal de f'' para que x_0 seja abcissa de um ponto de inflexão.
- **Atenção: $f''(x_0) = 0$ não garante** ponto de inflexão. Em $f(x) = x^4$ tem-se $f''(x) = 12x^2$, que se anula em 0 mas é sempre positiva (ou nula): não há mudança de sinal e o gráfico é côncavo para cima em todo o $\mathbb{R}$, pelo que **não existe** ponto de inflexão na origem.
- **Pontos de inflexão frequentes:** em polinómios de grau 3 há exatamente um (em $f(x) = x^3 - 3x$ é a origem); em $f(x) = e^{-x^2}$ há dois, simétricos; o logaritmo e a exponencial de base e têm concavidade de sinal constante ($\ln x$ é sempre côncava para baixo, e^x sempre para cima).
- **Ligação com os extremos:** nos extremos de uma função derivável a segunda derivada costuma ter sinal definido (negativa num máximo, positiva num mínimo), o que dá uma confirmação adicional da natureza do extremo.

Exercícios

1. Primeiro estudo: para $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, determina f'' e o seu zero, indica os intervalos de concavidade e as coordenadas do ponto de inflexão.

2. Cúbica simples: determina a segunda derivada de $f(x) = x^3$, mostra que muda de sinal na origem e indica o ponto de inflexão.

3. Alerta: para $f(x) = x^4$, calcula f'' e explica por que razão $x = 0$ não é abcissa de um ponto de inflexão, apesar de $f''(0) = 0$.

4. Concavidade constante: determina a segunda derivada de $f(x) = x^2 - 4x + 1$ e indica o sentido da concavidade em todo o domínio, justificando.

5. Com extremos: para $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, determina f'' e as coordenadas do ponto de inflexão, verificando a mudança de sinal.

6. Exponencial gaussiana: para $f(x) = e^{-x^2}$, mostra que $f''(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$ e indica as abcissas dos pontos de inflexão (seis casas decimais).

7. Logaritmo: determina a segunda derivada de $f(x) = \ln x$, indica o sentido da concavidade e explica se existe algum ponto de inflexão.

8. Extremos e inflexão: para $f(x) = x^3 - 3x$, determina os extremos, a segunda derivada e o ponto de inflexão, relacionando as três informações.

9. Dois pontos de inflexão: para $f(x) = x^4 - 6x^2 + 1$, determina f'' e as coordenadas dos dois pontos de inflexão.

10. Produto por exponencial: para $f(x) = x e^x$, mostra que $f'(x) = (x + 2)e^x$ e determina as coordenadas do ponto de inflexão (seis casas decimais).

11. Justificação: explica a relação entre o sinal da segunda derivada e o sentido da concavidade e justifica por que razão $f''(x_0) = 0$, por si só, não é suficiente para garantir um ponto de inflexão em x_0 .

12. (Python) O programa seguinte avalia a segunda derivada de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ em pontos à volta de $x = 2$ e imprime o estado da concavidade. Executa-o e indica exatamente o que é impresso, confirmando o resultado da questão 5.

```
def f(x):
    return x ** 3 - 6 * x ** 2 + 9 * x

def segunda_derivada(x):
    return 6 * x - 12

for x in (1.5, 1.9, 2.0, 2.1, 2.5):
    v = segunda_derivada(x)
    if v > 0:
        estado = 'concava para cima'
    elif v < 0:
        estado = 'concava para baixo'
    else:
        estado = 'ponto de inflexao'
    print(x, '→', estado)

print('Ponto de inflexao:', (2, f(2)))
```

Dica: percorre sempre a mesma sequência — f'' primeiro, zeros depois, e por fim o **estudo do sinal** à volta de cada zero. É esse último passo que distingue um verdadeiro ponto de inflexão de um simples ponto onde a segunda derivada se anula.

Soluções — Segunda derivada, concavidades e inflexão

1. $f'(x) = 3x^2 - 6x$ e $f''(x) = 6x - 6$. O zero é $x = 1$. Para $x < 1$ tem-se $f''(x) < 0$ (concavidade voltada para **baixo**) e para $x > 1$ tem-se $f''(x) > 0$ (concavidade voltada para **cima**), logo há mudança de sinal. $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$, pelo que o ponto de inflexão é **(1, 0)**.

2. $f'(x) = 3x^2$ e $f''(x) = 6x$. Para $x < 0$, $f''(x) < 0$ (concavidade para baixo); para $x > 0$, $f''(x) > 0$ (concavidade para cima); em $x = 0$ tem-se $f''(0) = 0$ **com mudança de sinal**, logo a origem **(0, 0)** é ponto de inflexão.

3. $f'(x) = 4x^3$ e $f''(x) = 12x^2$. Tem-se $f''(0) = 0$, mas como $12x^2 \geq 0$ para **todo** o x real, a segunda derivada **nunca é negativa** nem muda de sinal: o gráfico tem a concavidade voltada para cima em todo o $\mathbb{R}$ (é uma parábola de quarto grau «achatada» na origem). Como não existe mudança de sentido de concavidade, **$x = 0$ não é abscissa de ponto de inflexão** — é o exemplo que mostra que $f''(x_0) = 0$ não basta.

4. $f'(x) = 2x - 4$ e $f''(x) = 2$. Como $2 > 0$ para todo o x , a concavidade está voltada para **cima em todo o domínio** $\mathbb{R}$ — trata-se de uma parábola com a abertura para cima, e não existe ponto de inflexão (a segunda derivada nunca se anula).

5. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ e $f''(x) = 6x - 12$. O zero é $x = 2$; para $x < 2$, $f'' < 0$ e para $x > 2$, $f'' > 0$ — há mudança de sinal, confirmando o ponto de inflexão. $f(2) = 8 - 24 + 18 = 2$, logo o ponto de inflexão é **(2, 2)** ✓ (confirmado pelo programa da questão 12).

6. $f'(x) = -2x e^{-x^2}$ e, aplicando de novo a regra do produto, $f''(x) = -2e^{-x^2} + (-2x)(-2x)e^{-x^2} = (4x^2 - 2)e^{-x^2} = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$. Como $e^{-x^2} > 0$ sempre, os zeros vêm de $2x^2 - 1 = 0$, isto é $x^2 = 1/2$ e portanto **$x = \pm 1/\sqrt{2} \approx \pm 0,707107$** . Em ambos os pontos a segunda derivada muda de sinal ($f''(0) = -2 < 0$ e $f''(\pm 1) = 2e^{-1} > 0$), logo existem dois pontos de inflexão, simétricos um do outro.

7. $f'(x) = 1/x$ e $f''(x) = -1/x^2$, definida para $x > 0$. Como $-1/x^2$ é sempre **negativa**, o gráfico do logaritmo tem a concavidade voltada para **baixo em todo o seu domínio** $]0, +\infty[$. A segunda derivada nunca se anula, pelo que **não existe ponto de inflexão**.

8. $f'(x) = 3x^2 - 3$, que se anula em $x = \pm 1$: $f'(-1) = -1 + 3 = 2$ é um **máximo** e $f(1) = 1 - 3 = -2$ é um **mínimo**. A segunda derivada é $f''(x) = 6x$, que se anula em $x = 0$ com mudança de sinal, dando o ponto de inflexão **(0, 0)**. Relação entre as três informações: o máximo ocorre onde a concavidade é voltada para baixo ($f''(-1) = -6 < 0$) e o mínimo onde é voltada para cima ($f''(1) = 6 > 0$), e o ponto de inflexão situa-se exatamente entre os dois extremos.

9. $f'(x) = 4x^3 - 12x$ e $f''(x) = 12x^2 - 12$. Igualando a zero: $12x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$. A segunda derivada (uma parábola de abertura para cima) é negativa entre -1 e 1 e positiva fora desse intervalo, mudando de sinal em ambos os pontos. Como $f(1) = 1 - 6 + 1 = -4$ e a função é par, tem-se $f(-1) = -4$ também. Os pontos de inflexão são **(1, -4)** e **(-1, -4)**.

10. $f'(x) = e^x + x e^x = (1 + x)e^x$ e, derivando de novo pela regra do produto, $f''(x) = e^x + (1 + x)e^x = (x + 2)e^x$. Como $e^x > 0$ sempre, o único zero é $x = -2$, e aí $(x + 2)$ muda de sinal — logo há ponto de inflexão. $f(-2) = -2e^{-2} \approx -0,270671$, pelo que o ponto de inflexão é aproximadamente **(-2; -0,270671)**.

11. A segunda derivada mede a **taxa de variação da primeira**, ou seja, a rapidez com que o declive da tangente muda: se $f'' > 0$, o declive está a aumentar e a curva «vira-se para cima», ficando acima da sua tangente — concavidade voltada para cima; se $f'' < 0$, o declive está a diminuir e a curva fica abaixo da tangente — concavidade voltada para baixo. Quanto à segunda parte: um ponto de inflexão exige uma **mudança** de sentido da concavidade, e essa mudança traduz-se numa **mudança de sinal de f''** . O anulamento de f'' apenas indica que o declive tem aí um extremo (ou uma situação de estacionaridade); se f'' não mudar de sinal, a concavidade mantém-se do mesmo lado e **não há inflexão** — como se mostrou em $f(x) = x^4$ (questão 3), onde $f'' = 12x^2 \geq 0$ e o gráfico é côncavo para cima em todo o $\mathbb{R}$.

12. O programa imprime: **1.5 -> concava para baixo · 1.9 -> concava para baixo · 2.0 -> ponto de inflexao · 2.1 -> concava para cima · 2.5 -> concava para cima · Ponto de inflexao: (2, 2)**. Confirma exatamente o estudo analítico da questão 5: $f'' = 6x - 12$ é negativa antes de 2 (concavidade para baixo) e positiva depois (concavidade para cima), anulando-se em $x = 2$, onde $f(2) = 2$ — o ponto de inflexão **(2, 2)**.

Nota: ao estudar uma função, a segunda derivada completa a informação da primeira — o crescimento diz *para onde* vai o gráfico e a concavidade diz *como* vai. Os dois estudos juntos permitem esboçar o gráfico com fidelidade.