

Ficha 13 — Resolução aproximada de equações

12.º Ano

Matemática A

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: aplicar o teorema dos valores intermédios (Bolzano-Cauchy) para garantir a existência de raízes, localizar raízes pelos métodos da bisseção e de Newton-Raphson, interpretar geometricamente cada método e comparar as suas velocidades de convergência.

Revisão rápida — resolução aproximada de equações

- **Teorema dos valores intermédios (Bolzano-Cauchy):** se f é **contínua** em $[a, b]$ e $f(a)$ e $f(b)$ têm **sinais contrários** ($f(a) \times f(b) < 0$), então existe pelo menos um c em $]a, b[$ tal que $f(c) = 0$. O teorema garante a **existência** da raiz (não a unicidade, nem o seu valor).
- **Unicidade:** se além da continuidade a função for **estritamente monótona** no intervalo (por exemplo $f' > 0$ em $]a, b[$), a raiz é **única**.
- **Método da bisseção:** a partir de $[a, b]$ com $f(a) \cdot f(b) < 0$, calcula-se o ponto médio m ; o sinal de $f(m)$ diz qual das metades contém a raiz. Repetindo, o intervalo **reduz-se a metade** em cada passo: ao fim de n iterações tem largura $(b - a)/2^n$.
- **Método de Newton-Raphson:** a partir de uma estimativa inicial x_0 , usa-se a reta tangente ao gráfico nesse ponto: $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$. Geometricamente, x_{n+1} é a abcissa em que a **tangente em x_n corta o eixo Ox** .
- **Comparação:** a bisseção converge **sempre** (só precisa de continuidade e de mudança de sinal), mas devagar — cada iteração ganha um dígito binário. O método de Newton converge **muito mais depressa** quando a estimativa inicial é boa, mas exige o cálculo de f' e pode falhar se $f'(x_n)$ for próximo de zero ou se a estimativa estiver longe da raiz.
- **Nota sobre arredondamentos:** uma raiz obtida por método numérico é sempre um **valor aproximado**; a precisão pretendida determina quantas iterações realizar.

Exercícios

1. Bolzano-Cauchy: mostra que a equação $x^3 + x - 1 = 0$ tem pelo menos uma solução em $]0, 1[$ e justifica que essa solução é única.

2. Bisseção: aplica o método da bisseção à equação $x^3 + x - 1 = 0$, partindo de $[0, 1]$, e realiza quatro iterações, indicando o intervalo obtido em cada uma.

3. Newton-Raphson: aplica o método de Newton-Raphson à mesma equação, partindo de $x_0 = 1$, e calcula três iterações (seis casas decimais).

4. Velocidade de convergência: sabendo que a raiz vale aproximadamente 0,6823278038, calcula o erro de cada uma das iterações de Newton-Raphson (notação científica) e explica o que observas nos erros.

5. Outra equação: usa a bissecção para localizar a raiz de $\cos x = x$ no intervalo $[0, 1]$ e indica um valor aproximado às seis casas decimais.

6. Com exponencial: localiza a raiz de $e^x = 3 - x$ no intervalo $[0, 1]$ e apresenta-a com seis casas decimais.

7. Três raízes: mostra, pelo teorema dos valores intermédios, que a equação $x^3 - 4x + 1 = 0$ tem três soluções, indicando intervalos de amplitude 1 que as contenham.

8. Interpretação geométrica da bisseção: explica, com um esboço, o que acontece geometricamente em cada iteração do método da bisseção e porque é que o método converge sempre.

9. Interpretação geométrica de Newton-Raphson: explica o significado geométrico de cada iteração do método de Newton-Raphson, relacionando-o com a reta tangente.

10. Comparação dos métodos: compara os dois métodos quanto à rapidez de convergência, às condições exigidas e às situações em que cada um é preferível. Apoia a resposta nos resultados das questões 2, 3 e 4.

11. Justificação: enuncia as hipóteses do teorema dos valores intermédios e explica por que razão cada uma delas é indispensável, dando um exemplo (mesmo que esquemático) de uma função que falha a conclusão por não cumprir uma delas.

12. (Python) O programa seguinte aplica os dois métodos à equação $x^3 + x - 1 = 0$ (20 iterações de bisseção e 4 de Newton-Raphson). Executa-o e indica exatamente o que é impresso, comparando com os resultados das questões 2, 3 e 4.

```
def f(x):
    return x ** 3 + x - 1

def df(x):
    return 3 * x ** 2 + 1

a = 0.0
b = 1.0
for _ in range(20):
    m = (a + b) / 2
    if f(m) < 0:
        a = m
    else:
        b = m
print('Bissecao:', round((a + b) / 2, 6))

x = 1.0
for _ in range(4):
    x = x - f(x) / df(x)
print('Newton-Raphson:', round(x, 6))
```

Soluções — Resolução aproximada de equações

1. Seja $g(x) = x^3 + x - 1$. É uma função polinomial, logo **contínua em $[0, 1]$** . Além disso $g(0) = -1 < 0$ e $g(1) = 1 > 0$, ou seja $g(0) \times g(1) < 0$. Pelo teorema dos valores intermédios existe pelo menos um $c \in]0, 1[$ com $g(c) = 0$. Quanto à **unicidade**: $g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ para todo o x (é uma soma de parcelas não negativas com +1), pelo que g é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ e, sendo injetiva, não pode anular-se duas vezes — a solução é **única**.

2. Iterações de bisseção: **iteração 1** — $[0, 1]$, ponto médio 0,5, $g(0,5) = -0,375 < 0$, logo a raiz está em $[0,5, 1]$ · **iteração 2** — $[0,5, 1]$, médio 0,75, $g(0,75) = 0,171875 > 0$, logo $[0,5, 0,75]$ · **iteração 3** — $[0,5, 0,75]$, médio 0,625, $g(0,625) = -0,130859 < 0$, logo $[0,625, 0,75]$ · **iteração 4** — $[0,625, 0,75]$, médio 0,6875, $g(0,6875) = 0,012451 > 0$, logo $[0,625, 0,6875]$. A raiz está, portanto, em **$[0,625; 0,6875]$** , um intervalo de largura 0,0625 ($= 1/2^4$).

3. Com $f(x) = x^3 + x - 1$ e $f'(x) = 3x^2 + 1$, partindo de $x_0 = 1$: $x_1 = 1 - f(1)/f'(1) = 1 - 1/4 = 0,750000$ · $x_2 = 0,75 - f(0,75)/f'(0,75) = 0,75 - 0,171875/2,6875 = 0,686047$ · $x_3 = 0,686047 - f(0,686047)/f'(0,686047) \approx 0,682340$. Os valores aproximam-se rapidamente da raiz, cujo valor é $\approx 0,6823278038$.

4. Erros relativamente à raiz 0,6823278038: $x_1 = 0,750000 \rightarrow$ erro **$6,767 \times 10^{-2}$** · $x_2 = 0,686047 \rightarrow$ erro **$3,719 \times 10^{-3}$** · $x_3 = 0,682340 \rightarrow$ erro **$1,178 \times 10^{-5}$** (uma quarta iteração, $x_4 = 0,6823278039$, dá erro **$1,185 \times 10^{-10}$**). Observa-se que o número de casas decimais corretas **quase duplica** a cada iteração: 1 casa, 3 casas, 5 casas e depois 10 casas. É esta a razão pela qual se diz que o método de Newton-Raphson tem convergência muito rápida.

5. A equação $\cos x = x$ é equivalente a $\cos x - x = 0$. No intervalo $[0, 1]$: com $h(x) = \cos x - x$, tem-se $h(0) = 1 > 0$ e $h(1) = \cos 1 - 1 \approx -0,4597 < 0$, logo existe uma raiz. Aplicando a bisseção até à precisão pedida obtém-se **$x \approx 0,739085$** (confirmação: $\cos(0,739085) \approx 0,739085$).

6. $e^x = 3 - x$ equivale a $e^x + x - 3 = 0$. Com $k(x) = e^x + x - 3$, tem-se $k(0) = 1 + 0 - 3 = -2 < 0$ e $k(1) = e + 1 - 3 \approx 0,7183 > 0$, logo existe raiz em $]0, 1[$. A bisseção (ou o método de Newton) conduz a **$x \approx 0,792060$** (confirmação: $e^{0,792060} + 0,792060 \approx 3$).

7. Seja $p(x) = x^3 - 4x + 1$, polinomial e portanto contínua em $\mathbb{R}$. Calculando: $p(-3) = -27 + 12 + 1 = -14 < 0$ e $p(-2) = -8 + 8 + 1 = 1 > 0 \Rightarrow$ existe uma raiz em **$]-3, -2[$** ; $p(0) = 1 > 0$ e $p(1) = 1 - 4 + 1 = -2 < 0 \Rightarrow$ existe uma raiz em **$]0, 1[$** ; $p(1) = -2 < 0$ e $p(2) = 8 - 8 + 1 = 1 > 0 \Rightarrow$ existe uma raiz em **$]1, 2[$** . Como se trata de três intervalos disjuntos de amplitude 1, a equação tem **três soluções** (e, sendo um polinómio de grau 3, não pode ter mais do que três).

8. Geometricamente, a bisseção corresponde a ir **cortando o intervalo ao meio** e escolher sempre a metade onde o gráfico atravessa o eixo Ox — isto é, onde a função muda de sinal. Em cada passo o intervalo que contém a raiz passa a ter metade da largura anterior, pelo que a incerteza sobre o valor da raiz **reduz-se para metade** em cada iteração. O método converge sempre porque se apoia apenas em duas hipóteses muito fracas — continuidade e mudança de sinal nos extremos — e essas não se perdem ao passar de um intervalo para a sua metade: se f muda de sinal em $[a, b]$, muda necessariamente de sinal numa das duas metades.

9. Em cada iteração de Newton-Raphson traça-se a **reta tangente ao gráfico no ponto atual** ($x_n, f(x_n)$) e toma-se como nova estimativa a abscissa do ponto em que essa tangente **corta o eixo Ox** . Ora a tangente em x_n tem equação $y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$; fazendo $y = 0$ e resolvendo em ordem a x obtém-se exatamente $x = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$, que é a fórmula do método. Geometricamente, quando o gráfico é «suave» e a estimativa está perto da raiz, a tangente «aponta» quase diretamente para ela — daí a convergência muito rápida.

10. **Rapidez**: pelos resultados das questões 2 a 4, a bisseção precisou de 4 iterações apenas para reduzir o intervalo a 0,0625, enquanto o método de Newton atingiu o erro de $1,178 \times 10^{-5}$ logo na terceira iteração — e a largura do intervalo da bisseção só chega a valores da ordem de 10^{-5} por volta da décima sétima iteração, e a 10^{-10} apenas por volta da trigésima. **Condições exigidas**: a bisseção exige somente continuidade e mudança de sinal; Newton-Raphson exige que f seja derivável, que se conheça f' e que $f'(x_n) \neq 0$, além de precisar de uma estimativa inicial razoável. **Preferência**: a bisseção é preferível como método seguro de arranque (nunca diverge) e quando não há condições para calcular a derivada; Newton-Raphson é preferível quando a derivada é conhecida e se dispõe de uma boa estimativa inicial, caso em que converge com muito menos iterações.

11. O teorema exige: (i) que f seja **contínua** em $[a, b]$ e (ii) que $f(a)$ e $f(b)$ tenham **sinais contrários**. Ambas são indispensáveis. Sem continuidade o gráfico pode «saltar» de um lado para o outro do eixo sem nunca o atravessar — por exemplo, uma função definida por $f(x) = -1$ em $[0; 0,5[$ e $f(x) = 1$ em $[0,5; 1]$ tem $f(0) < 0$ e $f(1) > 0$ mas não se anula em nenhum ponto de $[0, 1]$, precisamente porque é descontínua em 0,5. Sem mudança de sinal também nada se pode concluir: em $f(x) = x^2 + 1$ tem-se $f(0) = 1$ e $f(1) = 2$, ambos positivos, e de facto a função não tem zeros reais — o teorema apenas não se aplica, o que mostra que a condição do sinal não é dispensável.

12. O programa imprime: **Bissecão: 0.682328** e **Newton-Raphson: 0.682328**. A bisseção com 20 iterações reduz o intervalo inicial $[0, 1]$ a uma largura de $1/2^{20} \approx 9,5 \times 10^{-7}$, dando o ponto médio 0,682328; o método de Newton com apenas 4 iterações chega ao mesmo valor arredondado, porque o seu erro cai de $3,719 \times 10^{-3}$ (iteração 2) para $1,178 \times 10^{-5}$ (iteração 3) e para $1,185 \times 10^{-10}$ (iteração 4). Ambos os métodos concordam com o valor de referência da questão 4 (0,6823278038) — a convergência de dois algoritmos independentes para o mesmo valor é a confirmação mais forte possível do resultado.

Nota: o teorema de Bolzano-Cauchy **garante a existência** mas não dá o valor da raiz — é por isso que, depois de garantir que a raiz existe e está isolada num intervalo, se usam métodos numéricos (bisseção ou Newton-Raphson) para a aproximar com a precisão pretendida.