

Ficha 7 — Regras de derivação e regra da cadeia

12.º Ano

Matemática A

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: aplicar as regras de derivação das potências de expoente racional, das exponenciais de base a e dos logaritmos de base a , e usar o teorema da derivada da função composta (regra da cadeia) em composições com potências, raízes, exponenciais e logaritmos.

Revisão rápida — regras de derivação

- **Potências de expoente racional:** $(x^a)' = a x^{a-1}$, para a racional e $x > 0$. Exemplos: $(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = 1/(2\sqrt{x})$ e $(x^{1/3})' = (1/3)x^{-2/3}$.
- **Exponenciais:** $(a^x)' = \ln a \times a^x$; em particular $(e^x)' = e^x$.
- **Logaritmos:** $(\log_a x)' = 1/(x \ln a)$; em particular $(\ln x)' = 1/x$.
- **Regra da cadeia (derivada da composta):** $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$. Deriva-se a função de fora, **avaliada na de dentro**, e multiplica-se pela derivada da função de dentro.
- **Aplicação prática:** em $h(x) = [u(x)]^n$ vem $h'(x) = n[u(x)]^{n-1} \times u'(x)$; em $h(x) = e^{u(x)}$ vem $h'(x) = e^{u(x)} \times u'(x)$; em $h(x) = \ln[u(x)]$ vem $h'(x) = u'(x)/u(x)$.
- **Soma e produto por constante:** $(f + g)' = f' + g'$ e $(k f)' = k f'$, o que permite derivar expressões mais longas termo a termo.

Exercícios

1. Regra da cadeia com potência: determina a derivada de $h(x) = (3x - 2)^5$ e calcula $h'(1)$ e $h'(2)$.

2. Cadeia com raiz: determina a derivada de $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ e calcula $h'(1)$ e $h'(0)$.

3. Potências de expoente racional: determina a derivada e calcula o valor pedido: a) $h(x) = \sqrt{x}$, em $x = 4$ · b) $h(x) = x^{2/3}$, em $x = 8$.

4. Exponencial de base a: determina a derivada de $f(x) = 5^x$ e calcula $f'(1)$ (seis casas decimais).

5. Logaritmo de base a: determina a derivada de $f(x) = \log_2 x$ e calcula $f'(2)$ (seis casas decimais).

6. Cadeia com exponencial: determina a derivada de $h(x) = e^{3x}$ e calcula $h'(0)$ e $h'(1)$ (seis casas decimais).

7. Cadeia com logaritmo: determina a derivada de $h(x) = \ln(x^2 + 1)$ e calcula $h'(1)$.

8. Cadeia com expoente variável: determina a derivada de $h(x) = e^{x^2}$ e calcula $h'(1)$ (seis casas decimais).

9. Cadeia dentro de cadeia: determina a derivada de $h(x) = \ln(e^{2x} + 1)$ e calcula $h'(0)$, verificando que o resultado é 1.

10. Raiz de logaritmo: determina a derivada de $h(x) = \sqrt{\ln x}$ e calcula $h'(e)$ (seis casas decimais). Começa por indicar o domínio de h .

11. Justificação: enuncia a regra da cadeia e explica, com um exemplo, por que razão é indispensável multiplicar pela derivada da função de dentro.

12. (Python) O programa seguinte estima o declive da tangente a $h(x) = (3x - 2)^5$ em $x = 1$ pelo quociente de diferenças e compara-o com o resultado analítico obtido na questão 1. Executa-o e indica exatamente o que é impresso.

```
def h(x):
    return (3 * x - 2) ** 5

x = 1
passo = 0.000001
numerica = (h(x + passo) - h(x)) / passo
print('Derivada numerica:', round(numerica, 4))
print('Derivada analitica:', 15 * (3 * x - 2) ** 4)
```

Dica: antes de derivar, identifica sempre as «camadas». Pergunta-te: «qual é a última operação que aplico a x ?» — é essa que dá a função de fora. Depois multiplica pelas derivadas sucessivas das camadas interiores, de fora para dentro.

Soluções — Regras de derivação e regra da cadeia

1. Com $u(x) = 3x - 2$ (logo $u'(x) = 3$) e a potência de fora elevada a 5: $h'(x) = 5(3x - 2)^4 \times 3 = 15(3x - 2)^4$. Em $x = 1$: $h'(1) = 15 \times 1^4 = 15$ · em $x = 2$: $h'(2) = 15 \times 4^4 = 15 \times 256 = 3840$.

2. Escrevendo $h(x) = (x^2 + 1)^{1/2}$, vem $h'(x) = (1/2)(x^2 + 1)^{-1/2} \times 2x = x / \sqrt{x^2 + 1}$. Em $x = 1$: $h'(1) = 1/\sqrt{2} \approx 0,707107$ · em $x = 0$: $h'(0) = 0/1 = 0$ — a tangente é horizontal em $x = 0$, o que corresponde ao mínimo da função nesse ponto.

3. a) $h(x) = x^{1/2} \Rightarrow h'(x) = (1/2)x^{-1/2} = 1/(2\sqrt{x})$; em $x = 4$: $h'(4) = 1/(2 \times 2) = 1/4 = 0,25$ · b) $h(x) = x^{2/3} \Rightarrow h'(x) = (2/3)x^{-1/3}$; em $x = 8$: $h'(8) = (2/3) \times 8^{-1/3} = (2/3) \times (1/2) = 1/3$.

4. $f'(x) = \ln 5 \times 5^x$. Em $x = 1$: $\ln 5 \times 5 \approx 1,609438 \times 5 = 8,047190$.

5. $f'(x) = 1/(x \ln 2)$. Em $x = 2$: $1/(2 \times 0,693147) \approx 0,721348$.

6. Com $u(x) = 3x$ (logo $u'(x) = 3$): $h'(x) = e^{3x} \times 3 = 3e^{3x}$. Em $x = 0$: $h'(0) = 3e^0 = 3$ · em $x = 1$: $h'(1) = 3e^3 \approx 60,256611$.

7. Com $u(x) = x^2 + 1$ ($u'(x) = 2x$): $h'(x) = 2x/(x^2 + 1)$. Em $x = 1$: $h'(1) = 2/2 = 1$.

8. Com $u(x) = x^2$ ($u'(x) = 2x$): $h'(x) = e^{x^2} \times 2x = 2x e^{x^2}$. Em $x = 1$: $h'(1) = 2 \times 1 \times e^1 = 2e \approx 5,436564$.

9. Com $u(x) = e^{2x} + 1$, a derivada da função de dentro é $u'(x) = 2e^{2x}$ (aplicando de novo a regra da cadeia). Logo $h'(x) = u'(x)/u(x) = 2e^{2x} / (e^{2x} + 1)$. Em $x = 0$: $h'(0) = 2e^0/(e^0 + 1) = 2/(1 + 1) = 1$ ✓ (note-se que a função tende para 2 quando $x \rightarrow +\infty$, pelo que o declive nunca ultrapassa 2).

10. Domínio: exige-se $\ln x \geq 0$ para a raiz e $x > 0$ para o logaritmo, logo $x \geq 1$, isto é $D = [1, +\infty[$. Escrevendo $h(x) = [\ln x]^{1/2}$: $h'(x) = (1/2)[\ln x]^{-1/2} \times (1/x) = 1 / (2x \sqrt{\ln x})$. Em $x = e$: $h'(e) = 1/(2e \times \sqrt{1}) = 1/(2e) \approx 0,183940$.

11. A regra da cadeia afirma que $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$: para derivar uma função composta, deriva-se a função **de fora** — mas avaliada no valor da de dentro, e não em x — e multiplica-se esse resultado pela derivada da função **de dentro**. A multiplicação é indispensável porque a variável x só aparece dentro de $u(x)$: se u percorre valores a uma certa velocidade (medida por u'), então f aplicada a u varia à razão de $f'(u)$ vezes essa velocidade. Exemplo: em $h(x) = (3x - 2)^5$, se nos esquecêssemos do fator 3 obteríamos $5(3x - 2)^4$, que está **errado** — com x a aumentar 1 unidade, o interior $3x - 2$ aumenta 3, e a potência amplifica essa variação; daí o fator 3 (levando a $15(3x - 2)^4$, como se confirma na questão 12 por via numérica).

12. O programa imprime: **Derivada numerica: 15.0001** e **Derivada analitica: 15**. O primeiro valor obtém-se pelo quociente de diferenças $[h(1 + h) - h(1)]/h$ com $h = 0,000001$, dando $\approx 15,0001$; o segundo é o resultado exato calculado pela regra da cadeia, $15(3 \times 1 - 2)^4 = 15$. Os dois valores coincidem até às unidades, e a pequena diferença de 0,0001 é apenas o **erro de aproximação** do quociente de diferenças — confirmação numérica de que a regra da cadeia produziu a derivada correta.

Nota: a regra da cadeia não substitui as regras anteriores — **combina-as**. Na mesma expressão pode ser preciso derivar uma potência, um logaritmo e uma exponencial, aplicando a cadeia tantas vezes quantas as camadas da composição.