

Teste de Matemática — Variáveis aleatórias, valor médio e modelo Normal

12.º Ano Matemática A 10 questões 20 valores 3 páginas

Instruções: apresenta todos os cálculos, incluindo os produtos valor x probabilidade que usas no valor médio e na variância. Nas questões de interpretação, explica o significado dos valores obtidos. Duração: 90 minutos.

Grupo I — Variáveis aleatórias e função massa de probabilidade

1. (2 valores) Lança-se duas vezes uma moeda equilibrada e seja X o número de caras obtidas. Indica o contradomínio de X e constrói a sua função massa de probabilidade.

2. (2 valores) Com a f.m.p. da questão anterior, calcula $P(X \geq 1)$ e indica a probabilidade do acontecimento complementar.

3. (2 valores) Uma variável aleatória X toma os valores 1, 2 e 3, com $P(X = i) = k \times i^2$. Determina k e escreve a f.m.p.

4. (2 valores) Seja X a soma das faces no lançamento de dois dados equilibrados. Calcula $P(X = 6)$ e $P(X \leq 4)$.

Grupo II — Valor médio, desvio padrão e modelo Normal

5. (2 valores) Para a variável X da questão 1, calcula o valor médio e o desvio padrão populacional.

6. (2 valores) Para a f.m.p. $P(X = i) = i/14$, com $i = 1, 2, 3$, calcula o valor médio de X e interpreta-o.

7. (2 valores) Num jogo paga-se 3 € para participar e recebe-se 10 € com probabilidade 0,2, 4 € com probabilidade 0,3 e nada com probabilidade 0,5. Calcula o ganho médio por partida e conclui se o jogo é favorável a quem joga.

8. (2 valores) Lança-se um dado equilibrado cinco vezes e seja X o número de vezes que sai a face 6. Calcula o valor médio e o desvio padrão de X .

9. (2 valores) A variável X segue um modelo Normal $N(50, 4)$. Calcula $P(46 < X < 54)$ e $P(X > 58)$.

10. (2 valores, Python) O programa seguinte constrói a f.m.p. do número de caras em dois lançamentos e calcula o valor médio e o desvio padrão. Executa-o e indica exatamente o que é impresso, comparando os resultados com os obtidos na questão 5.

```
from math import comb, sqrt

valores = [0, 1, 2]
probs = [comb(2, k) / 4 for k in valores]
media = sum(v * p for v, p in zip(valores, probs))
variancia = sum(p * (v - media) ** 2 for v, p in zip(valores, probs))

print('Fmp:', probs)
print('Valor medio:', media)
print('Desvio padrao:', round(variancia ** 0.5, 4))
```

Soluções — Teste de Variáveis Aleatórias

1. X pode tomar os valores **0, 1 e 2**, logo o contradomínio é $\{0, 1, 2\}$. Há $2^2 = 4$ resultados equiprováveis e os casos favoráveis são dados por 2C_k , portanto a f.m.p. é $P(X = 0) = 1/4$, $P(X = 1) = 2/4 = 1/2$ e $P(X = 2) = 1/4$ (soma 1 ✓).

2. $P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) = 1/2 + 1/4 = 3/4 = 0,75$. O acontecimento complementar é «nenhuma cara», com $P(X = 0) = 1/4 = 0,25$; como seria de esperar, $0,75 + 0,25 = 1$ ✓

3. A soma das probabilidades tem de ser 1: $k \times 1^2 + k \times 2^2 + k \times 3^2 = k(1 + 4 + 9) = 14k = 1$, logo **$k = 1/14$** . A f.m.p. é $P(X = 1) = 1/14 \approx 0,071$, $P(X = 2) = 4/14 = 2/7 \approx 0,286$ e $P(X = 3) = 9/14 \approx 0,643$.

4. Dos 36 pares equiprováveis, os que somam 6 são (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2) e (5, 1), ou seja 5 pares: $P(X = 6) = 5/36 \approx 0,139$. Quanto a $P(X \leq 4)$, há 1 par com soma 2, 2 com soma 3 e 3 com soma 4: $P(X \leq 4) = (1 + 2 + 3)/36 = 6/36 = 1/6 \approx 0,167$.

5. $\mu = 0 \times 1/4 + 1 \times 1/2 + 2 \times 1/4 = 0 + 0,5 + 0,5 = 1$ (em média sai uma cara por experiência de dois lançamentos). $E(X^2) = 0 \times 1/4 + 1 \times 1/2 + 4 \times 1/4 = 0 + 0,5 + 1 = 1,5$, logo $\text{Var}(X) = 1,5 - 1^2 = 0,5$ e $\sigma = \sqrt{0,5} \approx 0,707$.

6. $\mu = 1 \times (1/14) + 2 \times (4/14) + 3 \times (9/14) = (1 + 8 + 27)/14 = 36/14 = 18/7 \approx 2,571$. Interpretação: repetindo a experiência muitas vezes, o valor obtido é em média cerca de 2,57 — um valor acima de 2, coerente com o facto de os valores 2 e 3 concentrarem quase 93% da probabilidade.

7. Ganho médio (ignorando o preço de entrada) = $10 \times 0,2 + 4 \times 0,3 + 0 \times 0,5 = 2,0 + 1,2 + 0 = 3,2$ €. Como o ganho médio (3,2 €) é **superior** ao preço de participação (3 €), o jogo é **favorável** a quem joga: em média ganha-se 0,20 € por partida.

8. Trata-se de cinco repetições independentes com $p = 1/6$, logo $\mu = 5 \times 1/6 = 5/6 \approx 0,833$. Para a dispersão, $\text{Var}(X) = 5 \times (1/6) \times (5/6) = 25/36 \approx 0,694$ e $\sigma = \sqrt{(25/36)} = 5/6 \approx 0,833$.

9. Padronizando os extremos: $(46 - 50)/4 = -1$ e $(54 - 50)/4 = 1$, logo $P(46 < X < 54) = P(-1 < Z < 1) \approx 0,6827$ (o intervalo corresponde a $\mu \pm \sigma$). Para 58: $(58 - 50)/4 = 2$, logo $P(X > 58) = 1 - \Phi(2) \approx 1 - 0,9772 = 0,0228$ (cerca de 2,28%).

10. O programa imprime: **Fmp: [0.25, 0.5, 0.25] · Valor medio: 1.0 · Desvio padrao: 0.7071**. Os três valores coincidem com o que se obteve nas questões 1 e 5: a f.m.p. calculada com $\text{comb}(2, k) / 4$ dá exatamente 1/4, 1/2 e 1/4, o valor médio é 1 e o desvio padrão 0,7071 (o arredondamento de $\sqrt{0,5}$ às quatro casas decimais). O programa confirma, por cálculo direto, os resultados obtidos à mão com as fórmulas $\mu = \sum x_i P(X = x_i)$ e $\text{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2$.

Nota: antes de calcular μ ou σ , **verifica sempre que a f.m.p. soma 1** — é esse teste que valida a tabela e que permite determinar parâmetros (como o k da questão 3). E nos modelos Normais, padroniza primeiro: só depois se aplicam os valores de $\Phi(z)$.