

Resumo — Variáveis aleatórias, valor médio e modelo Normal

12.º Ano

Matemática A

2 páginas

Síntese

Esta síntese reúne o estudo das variáveis aleatórias do 12.º ano: variáveis discretas e contradomínio, função massa de probabilidade, função de distribuição, valor médio, variância e desvio padrão populacional, e o modelo Normal com a regra dos desvios padrão.

1. Variáveis aleatórias discretas

- Uma **variável aleatória** é uma função que a cada resultado de S associa um número. É **discreta** quando o conjunto dos valores possíveis (o **contradomínio**) é finito ou numerável — por exemplo, o número de caras em três lançamentos.
- Uma variável é **contínua** quando pode tomar qualquer valor de um intervalo (tempo até uma avaria, altura). Nesse caso não existe f.m.p.
- Convém sempre começar por identificar o **contradomínio**: é ele que determina quais os valores a somar em cada probabilidade.

2. Função massa de probabilidade (f.m.p.)

- A **f.m.p.** associa a cada valor x_i do contradomínio a probabilidade $P(X = x_i)$.
- Condições de validade:** $0 \leq P(X = x_i) \leq 1$ para todos os valores e a **soma de todos os valores da f.m.p. é 1**. Estas duas condições são o teste rápido de validade.
- Probabilidades de acontecimentos:** $P(X \leq a)$, $P(X > a)$ e $P(a \leq X < b)$ obtêm-se **somando as parcelas** da f.m.p. dos valores envolvidos.
- Casos típicos:** «número de sucessos em n repetições independentes» tem f.m.p. $P(X = k) = {}^nC_k p^k (1 - p)^{n-k}$ (com valores $k = 0, 1, \dots, n$); «soma das faces de dois dados» constrói-se contando os 36 pares equiprováveis.

3. Função de distribuição

A **função de distribuição** é $F(x) = P(X \leq x)$ — a probabilidade acumulada até x , obtida somando a f.m.p. de todos os valores menores ou iguais a x . É não decrescente, $F(x) = 0$ antes do primeiro valor do contradomínio e $F(x) = 1$ a partir do último. Exemplo (caras em três lançamentos): $F(2) = 1/8 + 3/8 + 3/8 = 7/8 = 0,875$.

4. Valor médio

- $\mu = E(X) = x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + \dots$ — cada valor pesado pela sua probabilidade.
- Interpreta-se como o **valor médio por experiência** quando o número de repetições é grande (o «centro de gravidade» da distribuição).
- Casos típicos:** em n repetições independentes de probabilidade de sucesso p , $\mu = n \times p$. Exemplo: número de vezes que sai a face 6 em quatro lançamentos $\rightarrow \mu = 4 \times 1/6 = 2/3 \approx 0,667$.
- Jogos:** o ganho médio calcula-se com μ . Se o preço a pagar for superior ao ganho médio, o jogo é **desfavorável**; se for igual, é **justo**.

5. Variância e desvio padrão populacional

- $Var(X) = E(X^2) - \mu^2$, onde $E(X^2) = x_1^2 P(X = x_1) + x_2^2 P(X = x_2) + \dots$
- $\sigma = \sqrt{Var(X)}$ mede a dispersão em torno de μ e exprime-se na **mesma unidade** da variável (ao contrário da variância, que é uma unidade quadrática). É por isso o parâmetro mais usado na prática.
- Repetições independentes:** $Var(X) = n \times p \times (1 - p)$. Uma variável **constante** tem $\sigma = 0$.
- Paralelismo com uma amostra:** a média amostral $\bar{x}$ e o desvio padrão populacional de uma amostra calculam-se pela mesma lógica, com $1/n$ a fazer o papel das probabilidades — cada observação recebe a probabilidade $1/n$.
- Dois variáveis com o **mesmo valor médio** podem ter dispersões muito diferentes: σ maior significa resultados mais espalhados (e, tipicamente, mais risco).

6. Modelo Normal

- O **modelo Normal** $N(\mu, \sigma)$ descreve variáveis **contínuas**; μ é o centro e σ controla a abertura. A curva tem forma de sino, é **simétrica** em relação a $x = \mu$ e delimita uma **área total igual a 1**.
- Simetria**: $P(X > \mu) = P(X < \mu) = 0,5$ e, para $a > 0$, $P(X < \mu - a) = P(X > \mu + a)$.
- Padronização**: $z = (x - \mu)/\sigma$ transforma $N(\mu, \sigma)$ em $N(0, 1)$. Intervalos **equiparados em valor padronizado** têm a mesma probabilidade, seja qual for μ e σ .
- Não faz sentido falar de $P(X = x)$: num modelo contínuo a probabilidade de um valor isolado é **0** e a probabilidade está sempre associada a **intervalos** (área sob a curva).
- Valores de referência: $\Phi(1) \approx 0,8413$ · $\Phi(2) \approx 0,9772$ · $\Phi(3) \approx 0,9987$.

7. Regra dos desvios padrão

Intervalo	Probabilidade	Probabilidade aproximada
$\mu \pm \sigma$	$P(-1 < Z < 1)$	68,27%
$\mu \pm 2\sigma$	$P(-2 < Z < 2)$	95,45%
$\mu \pm 3\sigma$	$P(-3 < Z < 3)$	99,73%

8. Tabela-resumo das fórmulas

Grandeza	Fórmula	Observação
Validade da f.m.p.	$\sum P(X = x_i) = 1$	e $0 \leq P(X = x_i) \leq 1$
Função de distribuição	$F(x) = P(X \leq x)$	soma acumulada da f.m.p.
Valor médio	$\mu = \sum x_i P(X = x_i)$	$\mu = n p$ nas repetições independentes
Variância	$\text{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2$	$\text{Var} = n p (1 - p)$ nas repetições independentes
Desvio padrão	$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$	mesma unidade da variável
Padronização	$z = (x - \mu)/\sigma$	reduz qualquer Normal a $N(0, 1)$

9. Erros frequentes a evitar

- Não verificar que a **f.m.p. soma 1** antes de a usar.
- Esquecer valores do contradomínio num acontecimento com extremo aberto ou fechado ($P(X \geq 9)$ inclui 9, 10, 11 e 12).
- Confundir **variância** com **desvio padrão** (σ é a raiz quadrada — 0,75 contra $\approx 0,866$).
- Interpretar σ como intervalo de valores possíveis: a regra dos desvios padrão dá **probabilidades**, e há sempre observações fora de $\mu \pm 2\sigma$.
- Usar f.m.p. em variáveis **contínuas** ou falar de $P(X = x)$ num modelo Normal.
- Comparar intervalos em bruto entre modelos com μ diferente, em vez de os **padronizar** primeiro.

Controlo rápido: com $X \sim N(100, 15)$, padroniza-se $(85 - 100)/15 = -1$ e $(115 - 100)/15 = 1$, logo $P(85 < X < 115) \approx 0,6827$; e $(130 - 100)/15 = 2$, logo $P(X > 130) = 1 - \Phi(2) \approx 0,0228$. Repara que 130 está dois desvios padrão acima do centro, mas a probabilidade de o exceder é apenas cerca de 2,3%.