

Ficha 5 — Variáveis aleatórias e função massa de probabilidade

12.º Ano

Matemática A

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: identificar variáveis aleatórias e os seus contradomínios, construir e validar funções massa de probabilidade (f.m.p.) de variáveis discretas e calcular probabilidades de acontecimentos definidos por uma variável aleatória.

Revisão rápida — variáveis aleatórias e f.m.p.

- **Variável aleatória** é uma função que a cada resultado do espaço de resultados S associa um **número**. É **discreta** quando o conjunto dos valores possíveis (o **contradomínio**) é finito ou numerável — por exemplo, o número de caras em três lançamentos.
- **Função massa de probabilidade (f.m.p.)** de uma variável discreta X : a tabela (ou fórmula) que a cada valor x_i do contradomínio associa $P(X = x_i)$.
- **Condições de validade:** cada probabilidade tem de estar entre 0 e 1, e a **soma de todos os valores da f.m.p. é 1**. Estas duas condições são o teste rápido de uma f.m.p. válida.
- **Probabilidades de acontecimentos:** $P(X \leq a)$, $P(X > a)$ ou $P(a \leq X < b)$ obtêm-se **somando as probabilidades pontuais** da f.m.p. correspondentes aos valores envolvidos.
- **Função de distribuição:** $F(x) = P(X \leq x)$ é a probabilidade acumulada até x , obtida somando a f.m.p. para todos os valores $\leq x$.
- **Casos típicos:** «número de sucessos em n repetições independentes» usa a f.m.p. $P(X = k) = {}^nC_k p^k (1 - p)^{n-k}$; «soma das faces de dois dados» constrói-se por contagem dos pares favoráveis (36 pares equiprováveis).

Exercícios

1. Variável aleatória? Indica, em cada caso, se é variável aleatória e se é discreta ou contínua, indicando o contradomínio quando for discreta: a) número de caras em três lançamentos de uma moeda · b) a face obtida no lançamento de um dado · c) o tempo (em horas) até uma lâmpada avariar.

2. Construção: seja X o número de caras em três lançamentos de uma moeda equilibrada. Constrói a f.m.p. de X e confirma que a soma dos valores é 1.

3. Parâmetro: uma variável aleatória X toma os valores 1, 2 e 3, com $P(X = 1) = 0,2$, $P(X = 2) = 0,5$ e $P(X = 3) = k$. Determina k .

4. Probabilidades: com a f.m.p. da questão 3, calcula a) $P(X \leq 2)$ · b) $P(X > 1)$ · c) $P(1 \leq X < 3)$.

5. Soma de dois dados: seja X a soma das faces no lançamento de dois dados equilibrados. Calcula a) $P(X = 7)$ · b) $P(X \geq 10)$.

6. Sucessos em repetições: lança-se um dado equilibrado quatro vezes e seja X o número de vezes que sai a face 6. Calcula a) $P(X = 0)$ · b) $P(X = 1)$, apresentando os valores exatos e aproximados.

7. Fórmula com parâmetro: uma variável X toma os valores 1, 2, 3 e 4, com $P(X = i) = k \times i$. Determina k e escreve a f.m.p.

8. Tabela completa: constrói a f.m.p. da soma das faces de dois dados equilibrados (tabela de $X = 2$ a $X = 12$) e usa-a para calcular $P(X \geq 9)$.

9. Função de distribuição: para $X =$ «número de caras em três lançamentos de uma moeda equilibrada», calcula $F(2) = P(X \leq 2)$ e interpreta o resultado.

10. Validação: verifica quais das tabelas seguintes são f.m.p. válidas e corrige as que não o forem: a) $P(1) = 0,1 \cdot P(2) = 0,2 \cdot P(3) = 0,3 \cdot P(4) = 0,4 \cdot$ b) $P(1) = 0,2 \cdot P(2) = 0,2 \cdot P(3) = 0,2 \cdot P(4) = 0,6$

11. Justificação: explica por que razão a soma dos valores de uma f.m.p. tem de ser exatamente 1 e por que razão cada valor tem de estar entre 0 e 1.

12. (Python) O programa seguinte constrói a f.m.p. da soma das faces de dois dados, contando os pares favoráveis. Executa-o e indica exatamente o que é impresso, identificando o valor com maior probabilidade.

```
from collections import Counter

S = [(a, b) for a in range(1, 7) for b in range(1, 7)]
sommas = [a + b for a, b in S]
contagens = Counter(sommas)

for s in range(2, 13):
    print(s, '→', contagens[s], '→', round(contagens[s] / 36, 4))
```

Dica: antes de calcular qualquer probabilidade, escreve o **contradomínio** da variável e testa a validade da f.m.p. (soma = 1). E repara numa armadilha frequente: o acontecimento « $X \geq 9$ » não corresponde a três valores, mas sim aos valores 9, 10, 11 e 12 — conta sempre os valores incluídos no extremo indicado.

Soluções — Variáveis aleatórias e f.m.p.

1. a) É variável aleatória **discreta**, com contradomínio $\{0, 1, 2, 3\}$. b) É variável aleatória **discreta**, com contradomínio $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. c) É variável aleatória **contínua**: o tempo pode tomar qualquer valor num intervalo, pelo que não tem contradomínio finito (nem se constrói uma f.m.p., mas sim uma função densidade).

2. Há $2^3 = 8$ resultados equiprováveis. Os casos favoráveis são dados por 3C_k :

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	$1/8 = 0,125$	$3/8 = 0,375$	$3/8 = 0,375$	$1/8 = 0,125$

Soma: $1/8 + 3/8 + 3/8 + 1/8 = 8/8 = 1$ ✓

3. A soma tem de ser 1: $0,2 + 0,5 + k = 1$, logo $k = 0,3$.

4. a) $P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0,2 + 0,5 = 0,7$. b) $P(X > 1) = P(X = 2) + P(X = 3) = 0,5 + 0,3 = 0,8$. c) $P(1 \leq X < 3) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0,7$ (o 3 está excluído, porque o intervalo é aberto no extremo direito).

5. a) Os pares com soma 7 são (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2) e (6, 1): $P(X = 7) = 6/36 = 1/6 \approx 0,167$. b) $P(X \geq 10) = P(10) + P(11) + P(12) = (3 + 2 + 1)/36 = 6/36 = 1/6 \approx 0,167$ (10 tem 3 pares, 11 tem 2 e 12 tem 1).

6. Repetições independentes com $p = 1/6$: a) $P(X = 0) = (5/6)^4 = 625/1296 \approx 0,4823$. b) $P(X = 1) = 4 \times (1/6) \times (5/6)^3 = 500/1296 \approx 0,3858$. Os coeficientes 1 e 4 são os coeficientes binomiais 4C_0 e 4C_1 , que contam em quantas posições pode ocorrer o sucesso.

7. A soma das probabilidades é $k \times 1 + k \times 2 + k \times 3 + k \times 4 = 10k$, que tem de ser 1, logo $k = 0,1$. A f.m.p. é $P(X = 1) = 0,1$, $P(X = 2) = 0,2$, $P(X = 3) = 0,3$, $P(X = 4) = 0,4$ (soma 1 ✓ e todos os valores entre 0 e 1).

8. A f.m.p. da soma (36 pares equiprováveis) é: $P(2) = 1/36$, $P(3) = 2/36$, $P(4) = 3/36$, $P(5) = 4/36$, $P(6) = 5/36$, $P(7) = 6/36$, $P(8) = 5/36$, $P(9) = 4/36$, $P(10) = 3/36$, $P(11) = 2/36$, $P(12) = 1/36$ (a soma de todos é $36/36 = 1$ ✓). Então $P(X \geq 9) = (4 + 3 + 2 + 1)/36 = 10/36 = 5/18 \approx 0,278$.

9. $F(2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1/8 + 3/8 + 3/8 = 7/8 = 0,875$. Interpretação: em 87,5% das experiências (três lançamentos) saem no máximo duas caras; o complementar, $P(X = 3) = 1/8 = 0,125$, é a probabilidade de saírem as três caras.

10. a) $0,1 + 0,2 + 0,3 + 0,4 = 1$, com todos os valores entre 0 e 1 → é uma f.m.p. válida. b) $0,2 + 0,2 + 0,2 + 0,6 = 1,2 \neq 1$ → não é válida (a soma excede 1). Para a corrigir, é preciso redistribuir os valores de modo a somarem 1 — por exemplo, $P(1) = P(2) = P(3) = 0,2$ e $P(4) = 0,4$.

11. Os acontecimentos $\{X = x_1\}$, $\{X = x_2\}$, ... são **disjuntos dois a dois** (a variável não pode tomar dois valores diferentes no mesmo resultado) e a sua **união é todo o espaço de resultados S**. Aplicando a aditividade para acontecimentos disjuntos e usando $P(S) = 1$, conclui-se que a soma de todos os valores da f.m.p. é **exatamente 1** — a variável toma forçosamente um dos valores do contradomínio. Quanto a cada valor: $P(X = x_i)$ é uma probabilidade de um acontecimento, logo está entre 0 e 1, por definição de modelo de probabilidade.

12. O programa imprime: 2 -> 1 -> 0.0278 · 3 -> 2 -> 0.0556 · 4 -> 3 -> 0.0833 · 5 -> 4 -> 0.1111 · 6 -> 5 -> 0.1389 · 7 -> 6 -> 0.1667 · 8 -> 5 -> 0.1389 · 9 -> 4 -> 0.1111 · 10 -> 3 -> 0.0833 · 11 -> 2 -> 0.0556 · 12 -> 1 -> 0.0278. A soma das contagens é $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$ ✓ e o valor com maior probabilidade é $X = 7$ ($6/36 \approx 0,1667$) — a distribuição é simétrica em torno de 7, decrescendo para os extremos.

Nota: a f.m.p. **descreve completamente** uma variável aleatória discreta: a partir dela obtêm-se todas as probabilidades de acontecimentos definidos por X (basta somar as parcelas adequadas) e, nas próximas fichas, o valor médio e o desvio padrão.