

Ficha 6 — Valor médio e desvio padrão

12.º Ano

Matemática A

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: calcular o valor médio μ e o desvio padrão populacional σ de uma variável aleatória discreta a partir da sua f.m.p., interpretar esses parâmetros na análise de jogos e estabelecer o paralelismo com a média e o desvio padrão de uma amostra.

Revisão rápida — valor médio e desvio padrão

- **Valor médio (esperança matemática):** $\mu = E(X) = x_1P(X = x_1) + x_2P(X = x_2) + \dots$ — cada valor pesado pela sua probabilidade. Interpreta-se como o **valor médio por experiência** quando se repete a experiência um grande número de vezes.
- **Variância populacional:** $\text{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2$, onde $E(X^2) = x_1^2P(X = x_1) + x_2^2P(X = x_2) + \dots$ (a soma dos **quadrados** dos valores pesados pelas probabilidades).
- **Desvio padrão populacional:** $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$. Mede a **dispersão** dos valores em torno do valor médio, na **mesma unidade** da variável — ao contrário da variância, que é uma unidade quadrática.
- **Paralelismo com uma amostra:** a média amostral $\bar{x} = (\text{soma das observações})/n$ e o desvio padrão amostral populacional $\sigma = \sqrt{(\text{soma dos quadrados dos desvios})/n}$ calculam-se pela mesma lógica, com **1/n** a fazer o papel das probabilidades — o que corresponde a dar a cada observação a mesma probabilidade 1/n.
- **Jogos e decisões:** numa aposta, o **ganho médio** (que se calcula com μ) indica o resultado esperado por jogo. Se o preço a pagar for superior ao ganho médio, o jogo é **desfavorável** a quem joga; se for igual, é um **jogo justo**.
- **Comparação de variáveis:** duas variáveis com o **mesmo valor médio** podem ter dispersões muito diferentes — σ maior significa resultados mais espalhados (e, tipicamente, mais risco). A variável **constante** tem $\sigma = 0$.

Exercícios

1. Valor médio: para $X = \text{«número de caras em três lançamentos de uma moeda equilibrada»}$, com f.m.p. $P(0) = P(3) = 1/8$ e $P(1) = P(2) = 3/8$, calcula $\mu = E(X)$.

2. Desvio padrão: com os dados da questão 1, calcula $E(X^2)$, a variância e o desvio padrão σ (valor exato e aproximado às milésimas).

3. Aplicação direta: para a f.m.p. $P(X = 1) = 0,2$, $P(X = 2) = 0,5$, $P(X = 3) = 0,3$, calcula μ e σ .

4. Soma de dois dados: para $X = \text{«soma das faces de dois dados equilibrados»}$, calcula μ e σ , indicando o valor exato da variância e o desvio padrão aproximado às milésimas.

5. Repetições independentes: para $X = \text{«número de vezes que sai a face 6 em quatro lançamentos de um dado equilibrado»}$, calcula μ e σ .

6. Fórmula com parâmetro: para a f.m.p. $P(X = i) = 0,1 \times i$, com $i = 1, 2, 3, 4$, calcula μ , a variância e σ .

7. Jogo: num jogo paga-se 2 € para participar e recebe-se 10 € com probabilidade 0,1, 2 € com probabilidade 0,3 e nada com probabilidade 0,6. Calcula o ganho médio por partida e decide se o jogo é favorável a quem joga.

8. Preço justo: numa lotaria vendem-se 1000 bilhetes; há 1 prémio de 500 € e 5 prémios de 50 €. Calcula o ganho médio por bilhete e o preço que tornaria a lotaria um jogo justo.

9. Mesmo valor médio, dispersões diferentes: a variável X toma sempre o valor 3 ($P(X = 3) = 1$); a variável Y toma os valores 1 e 5, cada um com probabilidade 0,5. Calcula μ e σ das duas e interpreta a diferença.

10. Paralelismo com uma amostra: considera as observações 2, 4, 4, 6 e 9. Calcula a média e o desvio padrão populacional e explica a analogia com o cálculo feito a partir de uma f.m.p.

11. Justificação: explica o significado de μ e de σ e justifica por que razão o desvio padrão é, em geral, mais utilizado do que a variância.

12. (Python) O programa seguinte calcula o valor médio, a variância e o desvio padrão a partir de uma f.m.p. Executa-o e indica exatamente o que é impresso, comentando o valor obtido para o valor médio.

```
valores = [1, 2, 3]
probs = [0.2, 0.5, 0.3]

media = sum(v * p for v, p in zip(valores, probs))
variancia = sum(p * (v - media) ** 2 for v, p in zip(valores, probs))

print('Valor medio:', media)
print('Variancia:', variancia)
print('Desvio padrao:', variancia ** 0.5)
```

Dica: organização é tudo neste tema. Constrói sempre uma tabela com três colunas — valores x_i , probabilidades $P(X = x_i)$ e produtos $x_i^2 P(X = x_i)$ — e só no fim somes. Erros de arrasto aparecem quase sempre por somar parcelas em falta, pelo que vale a pena confirmar primeiro que a f.m.p. soma 1.

Soluções — Valor médio e desvio padrão

1. $\mu = 0 \times 1/8 + 1 \times 3/8 + 2 \times 3/8 + 3 \times 1/8 = 0 + 3/8 + 6/8 + 3/8 = 12/8 = 1,5$. Em média, saem 1,5 caras por experiência de três lançamentos.
 2. $E(X^2) = 0 \times 1/8 + 1 \times 3/8 + 4 \times 3/8 + 9 \times 1/8 = 0 + 3/8 + 12/8 + 9/8 = 24/8 = 3$. Variância: $\text{Var}(X) = 3 - 1,5^2 = 3 - 2,25 = 0,75$. Desvio padrão: $\sigma = \sqrt{0,75} = \sqrt{3/2} \approx 0,866$.
 3. $\mu = 1 \times 0,2 + 2 \times 0,5 + 3 \times 0,3 = 0,2 + 1,0 + 0,9 = 2,1$. $E(X^2) = 1 \times 0,2 + 4 \times 0,5 + 9 \times 0,3 = 0,2 + 2,0 + 2,7 = 4,9$, logo $\text{Var}(X) = 4,9 - 2,1^2 = 4,9 - 4,41 = 0,49$ e $\sigma = 0,7$.
 4. A distribuição é simétrica em torno de 7, logo $\mu = 7$. Para a variância, cada soma s contribui com $(s - 7)^2$ ponderado pela sua probabilidade: os desvios ao quadrado 25, 16, 9, 4, 1 e 0 (e simetricamente 1, 4, 9, 16 e 25) entram com contagens 1, 2, 3, 4, 5 e 6. A soma dos numeradores é $25 \times 1 + 16 \times 2 + 9 \times 3 + 4 \times 4 + 1 \times 5 + 0 \times 6$, duplicada para os valores acima de 7, ou seja 210. Assim $\text{Var}(X) = 210/36 = 35/6 \approx 5,833$ e $\sigma = \sqrt{(35/6)} \approx 2,415$.
 5. Trata-se de quatro repetições independentes com $p = 1/6$, e nesses casos $\mu = 4 \times 1/6 = 2/3 \approx 0,667$. Quanto à dispersão, $\text{Var}(X) = 4 \times (1/6) \times (5/6) = 20/36 = 5/9 \approx 0,556$, logo $\sigma = \sqrt{(5/9)} \approx 0,745$.
 6. $\mu = 1 \times 0,1 + 2 \times 0,2 + 3 \times 0,3 + 4 \times 0,4 = 0,1 + 0,4 + 0,9 + 1,6 = 3$. $E(X^2) = 1 \times 0,1 + 4 \times 0,2 + 9 \times 0,3 + 16 \times 0,4 = 0,1 + 0,8 + 2,7 + 6,4 = 10$, logo $\text{Var}(X) = 10 - 3^2 = 1$ e $\sigma = 1$.
 7. Ganho médio (ignorando o preço de entrada): $10 \times 0,1 + 2 \times 0,3 + 0 \times 0,6 = 1,0 + 0,6 + 0 = 1,6$ € por partida. Como o ganho médio bruto (1,6 €) é inferior ao preço de participação (2 €), o jogo é **desfavorável** a quem joga: em média perde-se 0,40 € por partida. O preço que tornaria o jogo justo seria 1,60 €.
 8. O ganho médio por bilhete é $(1 \times 500 + 5 \times 50)/1000 = 750/1000 = 0,75$ €. Um preço de **0,75 €** por bilhete tornaria a lotaria um jogo justo; a preços superiores, o ganho médio do jogador é negativo.
 9. Para X : $\mu = 3$ e, como não há dispersão nenhuma, $\sigma = 0$ (a variável é constante). Para Y : $\mu = 1 \times 0,5 + 5 \times 0,5 = 3$ (o mesmo valor médio), $E(Y^2) = 1 \times 0,5 + 25 \times 0,5 = 13$, $\text{Var}(Y) = 13 - 9 = 4$ e $\sigma = 2$. Interpretação: ambas «acertam» em média no valor 3, mas Y **oscila** entre 1 e 5 enquanto X nunca se afasta de 3. Um σ maior significa resultados mais espalhados — e, em contexto de apostas, maior risco.
 10. Média: $\bar{x} = (2 + 4 + 4 + 6 + 9)/5 = 25/5 = 5$. Média dos quadrados: $(4 + 16 + 16 + 36 + 81)/5 = 153/5 = 30,6$, logo $\text{Var} = 30,6 - 25 = 5,6$ e $\sigma = \sqrt{5,6} \approx 2,366$. A analogia é exata: a média amostral é a soma dos valores multiplicados por $1/n$ e o valor médio de uma variável é a soma dos valores multiplicados pelas suas **probabilidades**. Do mesmo modo, $E(X^2)$ tem o papel de «média dos quadrados» — pelo que, no caso da amostra, se está a dar a cada observação a probabilidade $1/n$.
 11. O **valor médio** μ é o valor que se espera obter, em média, por experiência, quando o número de repetições é grande — é o «centro de gravidade» da distribuição, ponderado pelas probabilidades. O **desvio padrão** σ mede a dispersão em torno desse centro: valores típicos de σ pequeno indicam resultados agrupados perto de μ , e σ grande indica resultados espalhados. O desvio padrão é mais utilizado porque está na **mesma unidade** da variável (por exemplo, «caras» ou «euros»), enquanto a variância, sendo um quadrado, se expressa em unidades quadráticas e é por isso de interpretação mais difícil.
 12. O programa imprime: **Valor medio: 2.0999999999999996 · Variancia: 0.49 · Desvio padrao: 0.7**. Os valores coincidem exatamente com os da questão 3 ($\mu = 2,1 \cdot \text{Var} = 0,49 \cdot \sigma = 0,7$). Quanto ao valor médio, o número impresso **não é 2,1 com um erro de cálculo**: deve-se à forma como os computadores representam os números decimais em vírgula flutuante (binário), pelo que 2,1 surge como 2.0999999999999996 — a diferença está na décima sexta casa decimal e é um **artefacto de representação**, não um erro matemático.
- Nota:** em problemas de jogos, começa sempre por calcular o **ganho médio** e só depois o compare com o custo de participação: é essa comparação — e não a probabilidade de ganhar — que determina se o jogo é favorável, justo ou desfavorável.