

Teste de Matemática — Fenómenos aleatórios, probabilidade condicionada e independência

12.º Ano Matemática A 10 questões 20 valores 3 páginas

Instruções: apresenta todos os cálculos e, nas questões de justificação, explica o raciocínio que te levou à conclusão. Indica sempre as fórmulas usadas (regra de Laplace, regra da união, probabilidade condicionada, independência). Duração: 90 minutos.

Grupo I — Fenómenos aleatórios, espaço de resultados e regras

1. (2 valores) Numa caixa há 5 bolas vermelhas numeradas de 1 a 5 e 3 bolas azuis numeradas de 1 a 3. Retira-se uma bola ao acaso. Indica o número de elementos do espaço de resultados e calcula a probabilidade de sair bola vermelha.

2. (2 valores) No lançamento de um dado equilibrado, considera $A = \text{«sair número par»}$ e $B = \text{«sair número maior que 3»}$. Calcula $P(A \cup B)$ pela regra geral e confirma o resultado por contagem direta.

3. (2 valores) A caixa I tem 2 bolas brancas e 3 pretas; a caixa II tem 4 bolas brancas e 1 preta. Escolhe-se uma caixa ao acaso e retira-se depois uma bola. Calcula a probabilidade de sair bola branca.

4. (2 valores) Numa população de 200 pessoas há 120 mulheres e 80 homens. Praticam desporto federado 60 mulheres e 24 homens. Calcula $P(\text{desporto} \mid \text{mulher})$ e $P(\text{desporto} \mid \text{homem})$ e comenta a diferença entre os dois valores.

Grupo II — Probabilidade condicionada e independência

5. (2 valores) Sabendo que $P(A \cap B) = 0,12$ e $P(B) = 0,4$, calcula $P(A|B)$.

6. (2 valores) Com $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,6$ e $P(A \cap B) = 0,3$, averigua se A e B são independentes. Justifica.

7. (2 valores) Uma caixa contém 3 bolas verdes e 2 amarelas. Retiram-se, ao acaso e sem reposição, duas bolas. Calcula a probabilidade de: a) ambas verdes · b) sair uma bola de cada cor.

8. (2 valores) Lança-se um dado equilibrado três vezes. Calcula a probabilidade de sair a face 6 pelo menos uma vez, apresentando o valor exato e o valor aproximado às milésimas.

9. (2 valores) Mostra que, se $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,5$ e $P(A \cup B) = 0,7$, então A e B são independentes.

10. (2 valores, Python) O programa seguinte simula 600 lançamentos de um dado equilibrado e estima a frequência relativa da face 6. Executa-o e indica exatamente o que é impresso, comentando a diferença entre a frequência obtida e a probabilidade teórica.

```
import random

random.seed(1)
n = 600
cont = 0

for _ in range(n):
    if random.randint(1, 6) == 6:
        cont += 1

print('Frequencia relativa da face 6:', round(cont / n, 4))
print('Probabilidade teorica:', round(1 / 6, 4))
```

Soluções — Teste de Probabilidade

- O espaço de resultados tem $5 + 3 = 8$ elementos (oito bolas, todas distintas entre si). Sendo o espaço equiprovável, pela regra de Laplace: $P(\text{vermelha}) = 5/8 = \mathbf{0,625}$.
 - $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{4, 5, 6\}$, com $A \cap B = \{4, 6\}$. Regra geral: $P(A \cup B) = 3/6 + 3/6 - 2/6 = 4/6 = \mathbf{2/3}$. Contagem direta: $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$ tem 4 elementos, logo $P(A \cup B) = 4/6 = 2/3$ ✓
 - Pela lei da probabilidade total: $P(\text{branca}) = 0,5 \times (2/5) + 0,5 \times (4/5) = 0,5 \times 0,4 + 0,5 \times 0,8 = 0,2 + 0,4 = \mathbf{0,6}$. Em termos de árvore, somaram-se os dois caminhos que terminam em bola branca.
 - $P(\text{desporto} \mid \text{mulher}) = 60/120 = \mathbf{0,5}$ e $P(\text{desporto} \mid \text{homem}) = 24/80 = \mathbf{0,3}$. A prática é relativamente mais frequente nas mulheres (50% contra 30%). Repara que nos dois casos o denominador é o total do respetivo grupo — é isso que significa condicionar.
 - $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = 0,12/0,4 = \mathbf{0,3}$.
 - $P(A) \times P(B) = 0,5 \times 0,6 = \mathbf{0,3}$, que é exatamente $P(A \cap B)$. Como a igualdade $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ se verifica, A e B **são independentes** — saber que B ocorreu não altera a probabilidade de A.
 - a) $P(1.^\text{a} \text{ verde}) = 3/5$ e, sem reposição, $P(2.^\text{a} \text{ verde} \mid 1.^\text{a} \text{ verde}) = 2/4$; logo $P(\text{ambas verdes}) = 3/5 \times 2/4 = 6/20 = \mathbf{3/10} = \mathbf{0,3}$ · b) $P(\text{uma de cada}) = P(\text{verde depois amarela}) + P(\text{amarela depois verde}) = 3/5 \times 2/4 + 2/5 \times 3/4 = 6/20 + 6/20 = \mathbf{3/5} = \mathbf{0,6}$.
 - Pelo acontecimento complementar: $P(\text{pelo menos um } 6) = 1 - P(\text{nenhum } 6) = 1 - (5/6)^3 = 1 - 125/216 = \mathbf{91/216} \approx \mathbf{0,421}$. Em cada lançamento a probabilidade de não sair 6 é $5/6$, e os três lançamentos são independentes entre si.
 - Da regra da união tira-se $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,4 + 0,5 - 0,7 = \mathbf{0,2}$. Por outro lado, $P(A) \times P(B) = 0,4 \times 0,5 = \mathbf{0,2}$. Como os dois valores coincidem, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ e portanto A e B **são independentes**. Note-se ainda que $P(A|B) = 0,2/0,5 = 0,4 = P(A)$, como a independência exige.
 - O programa imprime: **Frequencia relativa da face 6: 0.14** e **Probabilidade teorica: 0.1667**. Obtiveram-se 84 casos de face 6 em 600 lançamentos, o que dá a frequência relativa 0,14 — inferior ao valor teórico $1/6 \approx 0,1667$. Esta diferença é normal: a frequência relativa **aproxima-se** da probabilidade à medida que o número de lançamentos aumenta, mas em séries finitas há sempre oscilação (com *seed* 1, 600 lançamentos deram um desvio de cerca de 0,027). Não significa que o dado esteja viciado.
- Nota:** em qualquer questão de probabilidade, começa por **identificar o espaço de resultados** e verifica se é equiprovável: se for, aplica-se a regra de Laplace; se não for, a probabilidade obtém-se pela lei da probabilidade total ou a partir da f.m.p.