

Ficha 2 — Probabilidade: regras e regra de Laplace

12.º Ano Matemática A 4 páginas 12 exercícios

Objetivo: aplicar a regra de Laplace em espaços equiprováveis, usar a regra geral $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ e a aditividade para acontecimentos disjuntos, organizar dados com diagramas de Venn e tabelas, e interpretar a frequência relativa como estimativa da probabilidade.

Revisão rápida — regras da probabilidade

- **Regra de Laplace** (só em espaços **equiprováveis**): $P(A) = |A| / |S|$, isto é, casos favoráveis a dividir por casos possíveis.
- **Aditividade** (acontecimentos **disjuntos**): se $A \cap B = \emptyset$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ — não há nada a descontar.
- **Regra geral da união**: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Subtrai-se a interseção porque os seus resultados seriam contados *duas vezes*.
- **Consequências**: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ · $P(\emptyset) = 0$ · $P(S) = 1$ · se $A \subset B$ então $P(A) \leq P(B)$ · $0 \leq P(A) \leq 1$. Em particular, **nenhuma probabilidade pode passar de 1** — é um teste rápido de coerência.
- **Venn e tabelas**: organizam os casos em «só A», «só B», «ambos» e «nem um nem outro»; essas quatro parcelas somam sempre o total de casos.
- **Interpretação frequencista**: a **frequência relativa** ($n.^\circ$ de vezes que o acontecimento ocorreu a dividir pelo $n.^\circ$ de repetições) aproxima-se da probabilidade à medida que o número de repetições aumenta.

Exercícios

1. Regra de Laplace: lança-se um dado cúbico equilibrado. Calcula a) $P(\text{número par})$ · b) $P(\text{número maior que 4})$

2. Baralho: de um baralho de 52 cartas retira-se uma ao acaso. Calcula a) $P(\text{ás})$ · b) $P(\text{copas})$ · c) $P(\text{ás de copas})$

3. União: no espaço $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ considera $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4\}$. Calcula $P(A \cup B)$ pela regra geral e confirma o resultado por contagem direta.

4. Aplicação: no lançamento de um dado, com $A = \text{«sair número par»}$ e $B = \text{«sair número maior que 4»}$, calcula $P(A \cup B)$.

5. Disjuntos: com $A = \{1, 2\}$ e $B = \{5, 6\}$, calcula $P(A \cup B)$ e explica por que razão, neste caso, não se subtrai nada.

6. Contrário e incógnita: a) se $P(A) = 0,35$, calcula $P(\bar{A})$ · b) se $P(A \cup B) = 0,9$, $P(A) = 0,5$ e $P(A \cap B) = 0,2$, determina $P(B)$.

7. Tabela e Venn: numa turma de 30 alunos, 18 jogam futebol, 12 praticam natação e 5 praticam as duas modalidades. Calcula a) $P(\text{futebol ou natação})$ · b) $P(\text{pratica só futebol})$ · c) $P(\text{não pratica nenhuma das modalidades})$.

8. Frequência relativa: um dado foi lançado 1 000 vezes e saiu a face 1 em 320 desses lançamentos. Calcula a frequência relativa dessa face e interpreta o valor obtido, comparando-o com $1/6$.

9. Cálculo direto: sabendo que $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,5$ e $P(A \cap B) = 0,3$, calcula $P(A \cup B)$ e verifica que o resultado é compatível com $0 \leq P \leq 1$.

10. Coerência: mostra que não é possível ter, ao mesmo tempo, $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,4$ e A e B disjuntos.

11. Justificação: explica por que razão, na regra $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, se subtrai a probabilidade da interseção.

12. (Python) O programa seguinte simula 1 000 lançamentos de um dado e calcula a frequência relativa de cada face. Executa-o e indica exatamente o que é impresso.

```
import random

random.seed(0)
n = 1000
contagens = [0] * 6

for _ in range(n):
    face = random.randint(1, 6)
    contagens[face - 1] += 1

for i, c in enumerate(contagens, start=1):
    print(i, '->', c, '->', round(c / n, 3))
```

Dica: a regra de Laplace só vale em espaços equiprováveis — nunca a uses com um dado viciado. E antes de somar probabilidades, verifica sempre se os acontecimentos são disjuntos: se não forem, a interseção tem de ser descontada uma vez.

Soluções — Regras e regra de Laplace

1. a) $A = \{2, 4, 6\} \rightarrow P = 3/6 = 1/2$ · b) $B = \{5, 6\} \rightarrow P = 2/6 = 1/3$. Em ambos os casos se aplicou a regra de Laplace, possível porque o dado é equilibrado.
 2. a) $P(\text{ás}) = 4/52 = 1/13$ · b) $P(\text{copas}) = 13/52 = 1/4$ · c) $P(\text{ás de copas}) = 1/52$, porque há exatamente **uma** carta que é simultaneamente ás e de copas.
 3. $P(A) = 3/6$, $P(B) = 2/6$ e $P(A \cap B) = P(\{3\}) = 1/6$. Regra geral: $P(A \cup B) = 3/6 + 2/6 - 1/6 = 4/6 = 2/3$. Contagem direta: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, logo $P = 4/6 = 2/3$ ✓
 4. $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{5, 6\}$, com $A \cap B = \{6\}$. Então $P(A \cup B) = 3/6 + 2/6 - 1/6 = 4/6 = 2/3$. Confirmação: $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$, que tem 4 elementos.
 5. $A \cap B = \emptyset$, logo os acontecimentos são **disjuntos** e aplica-se a aditividade: $P(A \cup B) = 2/6 + 2/6 = 4/6 = 2/3$. Não se subtrai nada porque não há **nenhum resultado comum** — a interseção é vazia e a sua probabilidade é 0.
 6. a) $P(\bar{A}) = 1 - 0,35 = 0,65$ · b) pela regra geral tem-se $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, donde $P(B) = 0,9 - 0,5 + 0,2 = 0,6$. Verificação: $0,5 + 0,6 - 0,2 = 0,9$ ✓
 7. Organizando: só futebol = $18 - 5 = 13$; só natação = $12 - 5 = 7$; ambas = 5; nenhuma = $30 - 25 = 5$. a) $P(\text{futebol ou natação}) = 25/30 = 5/6$ ($\approx 0,833$) · b) $P(\text{só futebol}) = 13/30$ · c) $P(\text{nenhuma}) = 5/30 = 1/6$. A soma das quatro parcelas é $13 + 7 + 5 + 5 = 30$ ✓
 8. Frequência relativa = $320/1000 = 0,32$ (32%). Este valor está bastante acima de $1/6 \approx 0,167$, o que sugere que o dado **não é equilibrado** para essa face. A frequência relativa estima a probabilidade do acontecimento: quanto mais lançamentos se fizerem, mais o valor tende a estabilizar perto da probabilidade real.
 9. $P(A \cup B) = 0,6 + 0,5 - 0,3 = 0,8$. O resultado é compatível: está entre 0 e 1, e é maior do que cada uma das probabilidades individuais (como se exige a uma união).
 10. Se A e B fossem disjuntos, ter-se-ia $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,7 + 0,4 = 1,1$. Ora $1,1 > 1$, o que é impossível: nenhuma probabilidade pode exceder 1. Logo **não é possível** que A e B sejam disjuntos com esses valores — terá de existir interseção não vazia (concretamente, $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1 = 0,1$).
 11. Se somássemos simplesmente $P(A) + P(B)$, os resultados que pertencem a **ambos** os acontecimentos (isto é, a $A \cap B$) seriam contados **duas vezes**: uma em $P(A)$ e outra em $P(B)$. Para obter a probabilidade da união, que conta cada resultado exatamente uma vez, é preciso **descontar uma dessas contagens** — e é precisamente isso que faz o termo $- P(A \cap B)$. Quando a interseção é vazia a correção é 0, e a regra reduz-se à aditividade.
 12. Com `seed 0` o programa imprime: **1 -> 193 -> 0.193 · 2 -> 150 -> 0.15 · 3 -> 166 -> 0.166 · 4 -> 170 -> 0.17 · 5 -> 152 -> 0.152 · 6 -> 169 -> 0.169**. A soma das contagens é $193 + 150 + 166 + 170 + 152 + 169 = 1\ 000$ ✓ e as frequências relativas andam todas perto de $1/6 \approx 0,167$, como seria de esperar de um dado equilibrado. Repara que o Python não escreve zeros à direita: 0,15 e 0,17 aparecem sem a última casa decimal.
- Nota:** o programa começa com `random.seed(0)` para que a simulação dê sempre o mesmo resultado — sem essa linha, a saída mudava a cada execução, o que impediria comparar o teu resultado com o das soluções.