

# Ficha 7 — Modelo Normal

12.º Ano Matemática A 4 páginas 12 exercícios

**Objetivo:** reconhecer as propriedades do modelo Normal de parâmetros  $\mu$  e  $\sigma$ , usar a simetria da curva em forma de sino e a regra dos desvios padrão, padronizar variáveis ( $z = (x - \mu)/\sigma$ ) e calcular probabilidades de intervalos com recurso à tecnologia.

## Revisão rápida — modelo Normal

- **Modelo Normal  $N(\mu, \sigma)$**  é um modelo de variável **contínua**, definido por dois parâmetros: o valor médio  $\mu$  (centro da curva) e o desvio padrão  $\sigma$  (controlo da abertura). Escreve-se  $X \sim N(\mu, \sigma)$ .
- A **curva normal** tem forma de sino, é **simétrica** em relação à reta vertical  $x = \mu$ , aproxima-se assintoticamente do eixo horizontal e delimita com esse eixo uma **área total igual a 1**.
- **Propriedades de simetria:**  $P(X > \mu) = P(X < \mu) = 0,5$  e, para  $a > 0$ ,  $P(X < \mu - a) = P(X > \mu + a)$ . A probabilidade de um intervalo é a **área sob a curva** nesse intervalo.
- **Padronização:** a mudança de variável  $z = (x - \mu)/\sigma$  transforma qualquer modelo Normal num modelo **Normal padrão  $N(0, 1)$** . É por isso que intervalos «equivalentes» têm sempre a mesma probabilidade, seja qual for o  $\mu$  e o  $\sigma$ .
- **Regra dos desvios padrão:**  $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$  ·  $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$  ·  $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$ .
- **Recurso à tecnologia:** os valores de  $\Phi(z) = P(Z \leq z)$  obtêm-se por **calculadora, folha de cálculo ou linguagem de programação** — os valores típicos usados neste nível de ensino são  $\Phi(1) \approx 0,8413$ ,  $\Phi(2) \approx 0,9772$  e  $\Phi(3) \approx 0,9987$ .

## Exercícios

1. Parâmetros: a variável  $X$  segue um modelo Normal  $N(100, 15)$ . Indica  $\mu$  e  $\sigma$ , justifica que  $P(X > 100) = 0,5$  e interpreta  $\sigma = 15$  no contexto da curva.

2. Padronização: para  $X \sim N(100, 15)$ , determina o valor padronizado  $z$  correspondente a  $x = 130$ .

3. Área à esquerda: ainda com  $X \sim N(100, 15)$  e usando  $\Phi(2) \approx 0,9772$ , calcula  $P(X < 130)$ .

4. Intervalo de um desvio padrão: para  $X \sim N(100, 15)$ , calcula  $P(85 < X < 115)$  e identifica a propriedade da curva normal usada.

5. Complementar: calcula  $P(X > 130)$  para  $X \sim N(100, 15)$ , a partir do resultado da questão 3.

6. Simetria: calcula  $P(X < 70)$  para  $X \sim N(100, 15)$  e confirma que  $P(X < 70) + P(X < 130) = 1$ .

7. Regra dos desvios padrão: indica as percentagens aproximadas de observações que ficam a menos de 1, 2 e 3 desvios padrão de  $\mu$  e explica o que acontece à medida que este intervalo alarga.

8. Contexto real: a altura de um grupo de pessoas segue, aproximadamente, um modelo Normal de valor médio 170 cm e desvio padrão 8 cm. Calcula a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso medir a) entre 162 cm e 178 cm · b) mais de 186 cm.

9. Interpretação de  $\sigma$ : duas turmas têm notas com o mesmo valor médio de 12 valores, mas  $\sigma = 1$  numa turma e  $\sigma = 4$  na outra. Em qual delas é mais provável encontrar alunos com notas muito afastadas da média? Justifica sem calcular.

10. Valor não inteiro de z: para  $X \sim N(100, 15)$ , calcula  $P(X < 125)$ , sabendo que  $\Phi(1,6667) \approx 0,9522$ .

11. Justificação: explica por que razão a área total sob a curva é 1 e por que razão a curva é simétrica. Explica também por que razão  $P(85 < X < 115)$  com  $X \sim N(100, 15)$  é igual a  $P(485 < Y < 515)$  com  $Y \sim N(500, 15)$ , e não a  $P(85 < Y < 115)$ .

12. (Python) O programa seguinte calcula probabilidades do modelo Normal  $N(100, 15)$  a partir da função erro (erf) e da padronização. Executa-o e indica exatamente o que é impresso, identificando com que resultados das questões anteriores coincidem.

```
from math import erf, sqrt

def normal_cdf(x, mu, sigma):
    z = (x - mu) / sigma
    return 0.5 * (1 + erf(z / sqrt(2)))

mu, sigma = 100, 15
print('P(X < 130):', round(normal_cdf(130, mu, sigma), 4))
print('P(85 < X < 115):', round(normal_cdf(115, mu, sigma) - normal_cdf(85, mu, sigma), 4))
print('P(X > 130):', round(1 - normal_cdf(130, mu, sigma), 4))
```

**Dica:** antes de fazer contas, **padroniza sempre** os extremos do intervalo com  $z = (x - \mu)/\sigma$ . Assim o problema reduz-se ao modelo  $N(0, 1)$  e aproveitam-se os valores conhecidos  $\Phi(1)$ ,  $\Phi(2)$  e  $\Phi(3)$ . E usa a simetria antes do complementar:  $P(X < \mu - a) = P(X > \mu + a)$  poupa trabalho e evita erros de sinal.

## Soluções — Modelo Normal

1.  $\mu = 100$  e  $\sigma = 15$ . Como a curva é simétrica em relação à reta  $x = \mu = 100$ , a área à direita e a área à esquerda ficam divididas em duas partes iguais, e como a área total é 1 cada metade vale 0,5, ou seja  $P(X > 100) = 0,5$ . O valor  $\sigma = 15$  mede a **abertura** da curva: quanto maior for  $\sigma$ , mais «achatada» e dispersa é a distribuição, e mais espalhados estão os valores em torno de 100.

2.  $z = (x - \mu)/\sigma = (130 - 100)/15 = 30/15 = 2$ . Um valor de  $x = 130$  situa-se exatamente a dois desvios padrão acima do valor médio.

3.  $P(X < 130) = P(Z < 2) = \Phi(2) \approx 0,9772$ . Cerca de 97,72% dos valores ficam abaixo de 130.

4. Os extremos padronizam-se para  $z = (85 - 100)/15 = -1$  e  $z = (115 - 100)/15 = 1$ . Logo  $P(85 < X < 115) = P(-1 < Z < 1) = 0,6827$ . A propriedade usada é a **simetria da curva normal**: a área entre  $\mu - \sigma$  e  $\mu + \sigma$  representa cerca de 68,27% da área total.

5. Pelo acontecimento complementar:  $P(X > 130) = 1 - P(X < 130) = 1 - 0,9772 = 0,0228$  (cerca de 2,28%).

6.  $z = (70 - 100)/15 = -2$ , logo  $P(X < 70) = \Phi(-2)$ . Pela simetria,  $\Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$ . Confirmação:  $P(X < 70) + P(X < 130) = 0,0228 + 0,9772 = 1$  ✓ — como seria de esperar, porque os dois acontecimentos são complementares (70 e 130 estão à mesma distância de  $\mu$ , um de cada lado).

7. A menos de 1 desvio padrão de  $\mu$ : cerca de **68,27%**; a menos de 2: cerca de **95,45%**; a menos de 3: cerca de **99,73%**. À medida que o intervalo alarga, a proporção cresce e aproxima-se rapidamente de 100%: já com 3 desvios padrão fica de fora apenas cerca de 0,27% das observações (menos de três em cada mil).

8. a) Os extremos 162 e 178 correspondem a  $170 - 8$  e  $170 + 8$ , ou seja  $\mu - \sigma$  e  $\mu + \sigma$ , logo a probabilidade é  $\approx 0,6827$  (68,27%) · b)  $186 = 170 + 2 \times 8$ , ou seja  $\mu + 2\sigma$ . Assim  $P(X > 186) = 1 - \Phi(2) \approx 1 - 0,9772 = 0,0228$  (cerca de 2,28%).

9. É na turma com  $\sigma = 4$ . O desvio padrão mede a dispersão em torno de  $\mu$ : com  $\sigma$  maior a curva é mais «achatada» e uma parte muito maior da área cai longe do centro, pelo que notas muito afastadas dos 12 valores são bastante mais frequentes. Isso vê-se bem nos intervalos  $\mu \pm \sigma$ : na turma com  $\sigma = 1$  eles vão de 11 a 13 valores, enquanto na turma com  $\sigma = 4$  vão de 8 a 16 — em ambos os casos com a mesma proporção de 68,27% das notas. Como a probabilidade se mantém e a largura do intervalo é muito maior, conclui-se que na turma com  $\sigma = 4$  os valores se espalham muito mais.

10.  $z = (125 - 100)/15 = 25/15 = 1,6667$ , logo  $P(X < 125) = \Phi(1,6667) \approx 0,9522$  (cerca de 95,22%).

11. A área total sob a curva é 1 porque a curva descreve a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória: a probabilidade de o valor observado ser *algum* número real é o acontecimento certo, logo vale 1. A curva é simétrica porque a função densidade do modelo Normal depende apenas de  $(x - \mu)^2$  — e não de  $(x - \mu)$  —, pelo que valores igualmente afastados de  $\mu$ , um para cada lado, têm a mesma «altura» de curva. Quanto à última questão: o que se conserva na mudança de  $\mu$  é o **valor padronizado**, não o intervalo em bruto. Com  $X \sim N(100, 15)$ , (85; 115) padroniza-se para  $z = (85 - 100)/15 = -1$  e  $z = 1$ ; com  $Y \sim N(500, 15)$  o mesmo par de valores padronizados corresponde a  $(500 - 15; 500 + 15) = (485; 515)$ . Ambos os intervalos dão portanto  $P(-1 < Z < 1) \approx 0,6827$ . Já o intervalo (85; 115) em  $Y$  padroniza-se para  $z \approx -27,7$  e  $z \approx 25,7$ , uma região praticamente sem área (probabilidade  $\approx 0$ ) — é por isso que **não** seria correto comparar os intervalos em bruto.

12. O programa imprime:  **$P(X < 130)$ : 0.9772 ·  $P(85 < X < 115)$ : 0.6827 ·  $P(X > 130)$ : 0.0228**. Os três valores coincidem exatamente com os obtidos nas questões 3, 4 e 5. A função `norma_l_cdf` implementa  $P(X < x)$  pela **padronização** ( $z = (x - \mu)/\sigma$ ) seguida da função erro (`erf`), pelo que o resultado da primeira linha é  $\Phi(2)$  e os restantes resultam de diferenças entre valores de  $\Phi$  — que é precisamente a técnica de cálculo por tecnologia referida no modelo.

**Nota:** o modelo Normal aplica-se a variáveis **contínuas** e, ao contrário das variáveis discretas das fichas anteriores, não faz sentido falar de  $P(X = x)$ : a probabilidade de um valor isolado é 0 e a probabilidade está sempre associada a **intervalos** (a área sob a curva).