

Ficha 4 — Independência e probabilidade total

12.º Ano

Matemática A

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: reconhecer acontecimentos independentes pelas suas definições equivalentes, distinguir independência de acontecimentos disjuntos, aplicar a lei da probabilidade total e resolver problemas de repetições independentes com o acontecimento complementar.

Revisão rápida — independência e probabilidade total

- **Acontecimentos independentes:** A e B são independentes quando $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Se $P(B) > 0$, é equivalente a $P(A|B) = P(A)$; se $P(A) > 0$, é equivalente a $P(B|A) = P(B)$. A ideia é esta: saber que um ocorreu **não altera** a probabilidade do outro.
- **Vários acontecimentos:** se A, B e C são independentes, $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$ — e o mesmo para qualquer número de acontecimentos.
- **Cuidado — disjuntos não é independentes:** dois acontecimentos disjuntos com probabilidades não nulas têm $P(A \cap B) = 0$, que é diferente de $P(A) \times P(B) > 0$; logo **não são independentes**. São conceitos distintos: disjuntos refere-se a resultados comuns, independência a influência entre probabilidades.
- **Lei da probabilidade total:** se $A_1, A_2, \dots, A_n$ formam uma **partição** de S (disjuntos dois a dois e união igual a S), então $P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + \dots + P(B|A_n)P(A_n)$. Em árvores, soma-se a probabilidade de todos os caminhos que terminam em B.
- **Repetições independentes:** se em cada repetição a probabilidade de sucesso é p, então $P(\text{nenhum sucesso em } n \text{ repetições}) = (1 - p)^n$ e, pelo acontecimento complementar, $P(\text{pelo menos um sucesso}) = 1 - (1 - p)^n$.

Exercícios

1. Independência: com $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ e $P(A \cap B) = 0,2$, os acontecimentos A e B são independentes? Justifica.

2. Contraexemplo: com $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,5$ e $P(A \cap B) = 0,4$, os acontecimentos são independentes? Justifica.

3. Definição equivalente: sabe-se que $P(A|B) = 0,3$ e $P(A) = 0,3$, com $P(B) > 0$. O que se pode concluir sobre A e B?

4. Duas moedas: lançam-se duas moedas equilibradas, com $A = \text{«a primeira sai cara»}$ e $B = \text{«a segunda sai cara»}$. Mostra que A e B são independentes.

5. Repetições independentes: lança-se uma moeda equilibrada três vezes. Calcula a) $P(\text{sárem três caras}) \cdot P(\text{sair pelo menos uma coroa})$.

6. Probabilidade total: numa fábrica, a máquina A produz 60% das peças e a máquina B produz as restantes 40%. A máquina A produz 2% de peças defeituosas e a B produz 5%. Calcula a probabilidade de uma peça, escolhida ao acaso, ser defeituosa.

7. Condicionada inversa: com os dados da questão 6, calcula $P(\text{peça da máquina A} \mid \text{peça defeituosa})$ e confirma que esse valor somado com o análogo para a máquina B dá 1.

8. Árvore e probabilidade total: escolhe-se uma caixa ao acaso entre duas: a caixa I tem 3 bolas brancas e 2 pretas; a caixa II tem 1 branca e 4 pretas. Retira-se depois uma bola da caixa escolhida. Calcula a probabilidade de sair bola branca.

9. Nenhum defeito: com os dados da questão 6, retiram-se 3 peças produzidas pela máquina A. Calcula a probabilidade de nenhuma ser defeituosa e indica o valor aproximado em percentagem.

10. Quatro lançamentos: lança-se uma moeda equilibrada quatro vezes. Qual é a probabilidade de saírem quatro caras?

11. Conceitos: no lançamento de um dado, considera $A = \{1, 2\}$ e $B = \{3, 4\}$. Mostra que A e B são disjuntos mas não são independentes. Explica por que razão os dois conceitos não coincidem.

12. (Python) O programa seguinte simula 10 000 pares de lançamentos de duas moedas equilibradas e estima a frequência de «duas caras». Executa-o e indica exatamente o que é impresso, comparando a frequência obtida com o produto das probabilidades.

```
import random

random.seed(0)
n = 10000
ambas = 0

for _ in range(n):
    a = random.randint(0, 1)
    b = random.randint(0, 1)
    if a == 1 and b == 1:
        ambas += 1

freq = ambas / n
print('Frequencia de duas caras:', round(freq, 3))
print('Produto das probabilidades:', 0.5 * 0.5)
```

Dica: em probabilidade total, o que se soma são **caminhos completos** (produto ao longo de cada ramo), nunca probabilidades de ramos soltos. E usa sempre o complementar quando aparecer «pelo menos um»: calcular $1 - P(\text{nenhum})$ é quase sempre muito mais rápido do que somar todos os casos favoráveis.

Soluções — Independência e probabilidade total

1. $P(A) \times P(B) = 0,5 \times 0,4 = 0,2$, que é exatamente $P(A \cap B)$. Como a igualdade $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ se verifica, A e B são **independentes**.
 2. $P(A) \times P(B) = 0,6 \times 0,5 = 0,3$, mas $P(A \cap B) = 0,4$. Como $0,3 \neq 0,4$, os acontecimentos **não são independentes** (a interseção é «maior» do que seria de esperar se não houvesse influência).
 3. Como $P(A|B) = P(A) = 0,3$, conclui-se que **A e B são independentes**: saber que B ocorreu não alterou a probabilidade de A. (Equivalentemente, ter-se-ia $P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B) = 0,3 \times P(B) = P(A) \times P(B)$.)
 4. $S = \{CC, CX, XC, XX\}$, com os quatro resultados equiprováveis. $A = \{CC, CX\}$ e $B = \{CC, XC\}$, logo $A \cap B = \{CC\}$. Então $P(A) = 2/4 = 0,5$, $P(B) = 2/4 = 0,5$ e $P(A \cap B) = 1/4 = 0,25$. Como $0,5 \times 0,5 = 0,25 = P(A \cap B)$, os acontecimentos são **independentes** — o resultado de uma moeda não influencia o da outra.
 5. a) As repetições são independentes, logo $P(CCC) = (1/2)^3 = 1/8$. b) pelo complementar, $P(\text{pelo menos uma coroa}) = 1 - P(\text{nenhuma coroa}) = 1 - 1/8 = 7/8$.
 6. Pela lei da probabilidade total: $P(\text{defeituosa}) = 0,6 \times 0,02 + 0,4 \times 0,05 = 0,012 + 0,020 = 0,032$ (3,2% das peças). Os acontecimentos «peça da máquina A» e «peça da máquina B» formam uma partição do conjunto das peças.
 7. Pela definição de probabilidade condicionada: $P(A | \text{defeituosa}) = P(A \cap \text{defeituosa}) / P(\text{defeituosa}) = (0,6 \times 0,02) / 0,032 = 0,012 / 0,032 = 0,375$. Para a máquina B: $(0,4 \times 0,05) / 0,032 = 0,020 / 0,032 = 0,625$. Soma: $0,375 + 0,625 = 1$ ✓ — como era de esperar, porque toda a peça defeituosa veio de uma das duas máquinas.
 8. Com probabilidade 0,5 escolhe-se cada caixa. Pela lei da probabilidade total: $P(\text{branca}) = 0,5 \times (3/5) + 0,5 \times (1/5) = 0,5 \times 0,6 + 0,5 \times 0,2 = 0,3 + 0,1 = 0,4$. Em termos de árvore, somaram-se os dois caminhos que terminam em bola branca.
 9. A probabilidade de uma peça da máquina A não ser defeituosa é $1 - 0,02 = 0,98$. Sendo as peças independentes entre si: $P(\text{nenhuma defeituosa}) = 0,98^3 = 0,941192$, isto é, aproximadamente **94,12%**.
 10. Repetições independentes: $P(CCCC) = (1/2)^4 = 1/16 = 0,0625$ (6,25%).
 11. $A \cap B = \emptyset$, logo os acontecimentos são **disjuntos**, e $P(A \cap B) = 0$. Por outro lado, $P(A) = 2/6 = 1/3$ e $P(B) = 2/6 = 1/3$, donde $P(A) \times P(B) = 1/9 \approx 0,111 \neq 0$. Como a igualdade da definição não se verifica, A e B **não são independentes**. Os conceitos não coincidem: serem *disjuntos* significa que não partilham resultados, enquanto serem *independentes* significa que a ocorrência de um não altera a probabilidade do outro. Aqui acontece precisamente o oposto — se A ocorre, B fica impossível, o que é a forma mais forte de dependência.
 12. Com seed 0 o programa imprime: **Frequencia de duas caras: 0.247** e **Produto das probabilidades: 0.25**. Obtiveram-se 2 470 casos de «duas caras» em 10 000 pares, o que dá a frequência relativa 0,247 — muito próxima do valor teórico $P(A) \times P(B) = 0,5 \times 0,5 = 0,25$. Esta concordância é a manifestação prática da independência: a frequência de ambos os acontecimentos ocorrerem coincide com o **produto** das frequências de cada um.
- Nota:** em cada repetição independente as probabilidades **multiplicam-se**; quando há várias vias possíveis para o mesmo acontecimento (partição), as probabilidades dos caminhos **somam-se**. É esta dupla regra — multiplicar ao longo dos ramos e somar entre ramos — que sustenta toda a lei da probabilidade total.