

Ficha 1 — Probabilidade: fenómenos aleatórios

12.º Ano

Matemática A

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: distinguir fenómenos determinísticos de fenómenos aleatórios, identificar o espaço de resultados de uma experiência aleatória, classificar acontecimentos (certo, impossível, elementar, composto, disjuntos, contrários) e reconhecer um modelo de probabilidade.

Revisão rápida — fenómenos aleatórios e acontecimentos

- **Fenómeno determinístico:** o resultado fica determinado pelas condições iniciais (a área de um quadrado de lado 3 é sempre 9). **Fenómeno aleatório:** repetindo a experiência nas mesmas condições, o resultado pode ser diferente (a face que sai ao lançar um dado).
- **Experiência aleatória** é um processo cujo resultado não se pode prever. O conjunto de todos os resultados possíveis é o **espaço de resultados S**, e cada resultado individual é um **acontecimento elementar**.
- **Classificação de acontecimentos:** **certo** é o que corresponde a S; **impossível** corresponde a $\emptyset$; **elementar** tem um único resultado; **composto** tem mais do que um.
- **Disjuntos:** A e B são disjuntos quando $A \cap B = \emptyset$ (não têm resultados em comum). **Contrário de A ($\bar{A}$):** é o acontecimento com $A \cap \bar{A} = \emptyset$ e $A \cup \bar{A} = S$.
- **Modelo de probabilidade:** uma função P definida nos acontecimentos com $P(A) \geq 0$, $P(S) = 1$ e, para acontecimentos **disjuntos**, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. A soma das probabilidades dos acontecimentos elementares é 1.
- **Consequências:** $P(\emptyset) = 0$ · $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ · se $A \subset B$ então $P(A) \leq P(B)$. Uma atribuição de probabilidades que não some 1 (sobre S) não é um modelo válido.

Exercícios

1. Determinístico ou aleatório? Classifica: a) lançar um dado e observar a face · b) aquecer água a 100 °C ao nível do mar · c) medir a área de um quadrado de lado 3 · d) o número de golos de um jogo que ainda não começou

2. Espaço de resultados: escreve o espaço de resultados S e indica |S| para o lançamento de um dado cúbico equilibrado.

3. Duas moedas: lançam-se duas moedas e registam-se as faces. Escreve o espaço de resultados e indica |S|.

4. Dois dados: lançam-se dois dados. Indica $|S|$ e escreve o acontecimento $A = \text{«a soma das faces é 7»}$, indicando o número de elementos de A .

5. Classificação: no lançamento de um dado, classifica cada acontecimento (certo, impossível, elementar ou composto): a) «sair número par» · b) «sair 6» · c) «sair número menor que 7» · d) «sair 8»

6. Disjuntos: no espaço $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, considera $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$ e $C = \{3, 4\}$. A e B são disjuntos? E A e C ? Justifica.

7. Contrário: no lançamento de um dado, indica o acontecimento contrário de $A = \text{«sair número par»}$ e mostra que $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

8. Modelo de probabilidade: para $S = \{a, b, c\}$, indica quais das atribuições são modelos de probabilidade válidos: a) $P(a) = 0,4 \cdot P(b) = 0,4 \cdot P(c) = 0,2$ b) $P(a) = P(b) = P(c) = 0,5$ c) $P(a) = 0,3 \cdot P(b) = 0,3 \cdot P(c) = 0,4$

9. Contagem: lançam-se três moedas distintas. Quantos resultados tem o espaço de resultados?

10. Acontecimento e probabilidade: numa caixa há 4 bolas vermelhas e 6 bolas azuis, indistinguíveis ao tato. Retira-se uma bola. Indica $|S|$ e calcula a probabilidade de sair bola vermelha.

11. Justificação: explica por que razão a soma das probabilidades dos acontecimentos elementares de S é igual a 1 e por que razão se tem sempre $P(\emptyset) = 0$.

12. (Python) O programa seguinte constrói o espaço de resultados do lançamento de dois dados e conta os resultados cuja soma é 7. Executa-o e indica exatamente o que é impresso.

```
S = [(a, b) for a in range(1, 7) for b in range(1, 7)]

print('Espaco de resultados:', len(S))
A = [p for p in S if p[0] + p[1] == 7]
print('Acontecimento soma 7:', len(A))
print('Probabilidade:', len(A) / len(S))
```

Dica: antes de calcular qualquer probabilidade, **escreve o espaço de resultados** — a maior parte dos erros vem de um S incompleto (por exemplo, esquecer que em duas moedas a ordem conta e que $|S| = 4$, e não 3). E lembra-te de que «disjuntos» e «contrários» não são a mesma coisa: os contrários são sempre disjuntos, mas dois acontecimentos disjuntos não têm de ser contrários.

Soluções — Fenómenos aleatórios

1. a) **Aleatório** — não se sabe qual a face que sai · b) **Determinístico** — ao nível do mar a água ferve a 100 °C · c) **Determinístico** — a área é $3^2 = 9$ · d) **Aleatório** — o número de golos não é previsível antes do jogo.

2. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $|S| = 6$. Cada face é um acontecimento elementar.

3. Com C para cara e X para coroa, $S = \{CC, CX, XC, XX\}$ e $|S| = 4$. Repara que CX e XC são resultados distintos: o resultado de cada moeda é registado separadamente, pelo que a ordem importa.

4. Cada dado tem 6 resultados possíveis, logo $|S| = 6 \times 6 = 36$ (pares ordenados). $A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$, com $|A| = 6$.

5. a) «sair número par» = $\{2, 4, 6\} \rightarrow$ **composto** (3 elementos) · b) «sair 6» = $\{6\} \rightarrow$ **elementar** · c) «sair número menor que 7» = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S \rightarrow$ **certo** · d) «sair 8» = $\emptyset \rightarrow$ **impossível**.

6. $A \cap B = \emptyset$ (A tem 1, 2, 3 e B tem 4, 5, sem elementos em comum), logo A e B são **disjuntos**. Quanto a A e C, tem-se $A \cap C = \{3\} \neq \emptyset$, logo **não são disjuntos**: partilham o resultado 3. Repara ainda que $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \neq S$, o que mostra que ser disjunto não é o mesmo que ser contrário.

7. $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$ («sair número ímpar»). Com o dado equilibrado, $P(A) = 3/6 = 0,5$ e $P(\bar{A}) = 3/6 = 0,5$, logo $P(A) + P(\bar{A}) = 0,5 + 0,5 = 1 \checkmark$. Além disso $A \cap \bar{A} = \emptyset$ e $A \cup \bar{A} = S$, como exige a definição de contrário.

8. a) $0,4 + 0,4 + 0,2 = 1 \rightarrow$ **válido** (todos os valores são ≥ 0) · b) $0,5 + 0,5 + 0,5 = 1,5 \neq 1 \rightarrow$ **não é válido** · c) $0,3 + 0,3 + 0,4 = 1 \rightarrow$ **válido**. A condição decisiva é que a soma das probabilidades dos acontecimentos elementares seja exatamente 1.

9. Cada moeda tem 2 resultados e as moedas são distintas, logo $|S| = 2^3 = 8$ resultados (de CCC a XXX).

10. Há $4 + 6 = 10$ bolas, logo $|S| = 10$ (um resultado por bola). Como as bolas são indistinguíveis ao tato, os 10 resultados são equiprováveis: $P(\text{vermelha}) = 4/10 = 0,4$ (ou 40%).

11. Cada resultado de S pertence a exatamente **um** acontecimento elementar, pelo que os acontecimentos elementares são dois a dois **disjuntos** e a sua união é o próprio S. Aplicando repetidamente a propriedade da aditividade para acontecimentos disjuntos, a soma das suas probabilidades é $P(S) = 1$. Quanto a $\emptyset$: como $\emptyset$ e S são disjuntos e $\emptyset \cup S = S$, tem-se $P(\emptyset) + P(S) = P(S)$, donde **$P(\emptyset) = 0$** — um acontecimento impossível tem probabilidade nula.

12. O programa imprime: **Espaco de resultados: 36 · Acontecimento soma 7: 6 · Probabilidade: 0.16666666666666666**. Os dois primeiros valores confirmam a questão 4 (36 pares ordenados, 6 dos quais com soma 7) e a probabilidade é $6/36 = 1/6$, que em Python aparece com todas as casas decimais da representação binária — aproximadamente 0,167, isto é, 16,7%.

Nota: em Probabilidade, o trabalho começa sempre pela **descrição do espaço de resultados** e pela identificação do acontecimento como subconjunto de S. Só depois se atribuem probabilidades — e apenas se a atribuição verificar $P(S) = 1$ e $P(A) \geq 0$ é que constitui um modelo válido.