

Resumo — Probabilidade: regras, condicionada e independência

12.º Ano

Matemática A

2 páginas

Síntese

Esta síntese reúne os fundamentos da probabilidade do 12.º ano: fenómenos aleatórios e espaço de resultados, acontecimentos e modelo de probabilidade, regra de Laplace, regras do complementar e da união, probabilidade condicionada, acontecimentos independentes e lei da probabilidade total.

1. Fenómenos aleatórios e espaço de resultados

- Um **fenómeno determinístico** tem resultado previsível a partir das condições iniciais (a área de um quadrado de lado 3). Um **fenómeno aleatório** tem resultado imprevisível, mesmo repetindo a experiência nas mesmas condições (a face obtida num dado).
- Numa **experiência aleatória**, o conjunto de todos os resultados possíveis é o **espaço de resultados S**. Cada resultado isolado é um **acontecimento elementar**.
- Se todos os resultados elementares têm a mesma probabilidade, o espaço diz-se **equiprovável** (dado equilibrado, moeda equilibrada, baralho bem baralhado).

2. Acontecimentos e modelo de probabilidade

- Um **acontecimento** é um subconjunto de S. É **certo** se for S, **impossível** se for $\emptyset$, **elementar** se tiver um só resultado e **composto** se tiver mais do que um.
- Disjuntos**: $A \cap B = \emptyset$ (não têm resultados comuns). **Contrários**: $A \cap \bar{A} = \emptyset$ e $A \cup \bar{A} = S$.
- Um **modelo de probabilidade** é uma função P que a cada acontecimento atribui um número, com $P(A) \geq 0$, $P(S) = 1$ e, para acontecimentos disjuntos, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- Consequências imediatas: $P(\emptyset) = 0$, $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, $0 \leq P(A) \leq 1$ e, se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$. A soma das probabilidades dos acontecimentos elementares de S é 1.

3. Regra de Laplace

Em espaços **equiprováveis**, $P(A) = |A| / |S|$ — o número de casos favoráveis a dividir pelo número de casos possíveis. Exemplo: num baralho de 52 cartas, $P(\text{ás}) = 4/52 = 1/13$ e $P(\text{copas}) = 13/52 = 1/4$. A regra só se aplica quando todos os resultados elementares têm a mesma probabilidade.

4. Regras do complementar e da união

- Complementar**: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. É a ferramenta preferida em expressões como «pelo menos um», que se calculam por $1 - P(\text{nem um})$.
- União (regra geral)**: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Subtrai-se a interseção porque os seus resultados seriam **contados duas vezes**.
- Se A e B forem **disjuntos**, $P(A \cap B) = 0$ e a regra reduz-se a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- Diagramas de **Venn** e **tabelas de contingência** organizam os casos em «só A», «só B», «ambos» e «nem um nem outro» — os quatro grupos somam sempre 100% dos casos.

5. Probabilidade condicionada

- $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, com $P(B) > 0$. Lê-se «probabilidade de A sabendo que B ocorreu».
- A ideia central: condicionar em B **reduz o espaço de resultados a B** — o denominador deixa de ser |S| e passa a ser o número de casos em que a condição se verifica.
- Regra do produto**: $P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B) = P(A) \times P(B|A)$ — é a mesma igualdade lida por outra ordem, e é o instrumento das árvores.
- Árvores**: multiplicam-se as probabilidades ao longo de cada ramo (probabilidade do caminho) e somam-se os caminhos que realizam o acontecimento.
- Em geral $P(A|B) \neq P(B|A)$: os dois valores dividem por totais diferentes.

6. Acontecimentos independentes

- A e B são **independentes** quando $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Equivalentemente (se $P(B) > 0$), $P(A|B) = P(A)$: saber que um ocorreu não altera a probabilidade do outro.
- Para vários acontecimentos: $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$ quando são independentes.
- Repetições independentes**: $P(\text{nenhum sucesso em } n \text{ repetições}) = (1 - p)^n$, logo $P(\text{pelo menos um}) = 1 - (1 - p)^n$.
- Disjuntos não é independentes!** Dois acontecimentos disjuntos com probabilidades não nulas têm $P(A \cap B) = 0 \neq P(A) \times P(B) > 0$. Se A ocorre, B fica impossível — é a forma mais forte de dependência.

7. Lei da probabilidade total

Se $A_1, A_2, \dots, A_n$ formam uma **partição** de S (disjuntos dois a dois e união igual a S), então $P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + \dots + P(B|A_n)P(A_n)$ — somam-se as probabilidades dos caminhos que terminam em B. Exemplo: se a máquina A produz 60% das peças com 2% de defeituosas e a B produz 40% com 5%, então $P(\text{defeituosa}) = 0,6 \times 0,02 + 0,4 \times 0,05 = 0,012 + 0,020 = \mathbf{0,032}$.

8. Tabela-resumo das fórmulas

Situação	Fórmula	Quando se usa
Laplace	$P(A) = A / S $	espaço equiprovável
Complementar	$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$	«pelo menos um», «no máximo»
União	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	«A ou B», com casos comuns
Condicional	$P(A B) = P(A \cap B) / P(B)$	informação adicional sobre o resultado
Produto	$P(A \cap B) = P(B) \times P(A B)$	experiências sequenciais, árvores
Independência	$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$	testar se há influência
Probabilidade total	$P(B) = \sum P(B A_i) P(A_i)$	partição de S (máquinas, caixas)

9. Erros frequentes a evitar

- Aplicar a **regra de Laplace** em espaços **não equiprováveis** (dados viciados, bolas de tamanhos diferentes).
- Esquecer de **subtrair a interseção** na união, ou subtrai-la quando os acontecimentos são disjuntos (aí não há interseção).
- Trocar $P(A|B)$ com $P(B|A)$ — são valores diferentes e medem coisas diferentes.
- Confundir **disjuntos** com **independentes**: nenhum dos conceitos implica o outro.
- Somar **ramos soltos** numa árvore em vez de multiplicar ao longo de cada caminho e só depois somar os caminhos.
- Usar o **complementar** sem verificar que o acontecimento complementar foi bem identificado («nenhum» e não «exatamente um»).

Controlo rápido: com $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ e $P(A \cap B) = 0,2$, verifica-se $0,5 \times 0,4 = 0,2 = P(A \cap B)$, logo A e B são **independentes**; então $P(A \cup B) = 0,5 + 0,4 - 0,2 = \mathbf{0,7}$ e $P(A|B) = 0,2/0,4 = \mathbf{0,5} = P(A)$, como a independência exige.