

Ficha 3 — Probabilidade condicionada e árvores

12.º Ano

Matemática A

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: calcular probabilidades condicionadas $P(A|B)$, aplicar a regra do produto $P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$, organizar experiências sequenciais em árvores de probabilidade e resolver problemas com tabelas de contingência.

Revisão rápida — probabilidade condicionada

- **Definição:** $P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$, com $P(B) > 0$. Lê-se «probabilidade de A *sabendo que* B ocorreu».
- **Ideia-chave:** condicionar em B **reduz o espaço de resultados a B** — passa-se a dividir apenas pelos casos em que B aconteceu, e não por todos os casos.
- **Regra do produto:** $P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B) = P(A) \times P(B|A)$. É uma consequência imediata da definição e o instrumento central nas árvores.
- **Árvores de probabilidade:** em cada ramo escreve-se a probabilidade condicionada ao que já aconteceu; a probabilidade de um **caminho** obtém-se **multiplicando** as probabilidades dos seus ramos, e a de um acontecimento que reúne vários caminhos obtém-se **somando** os caminhos.
- **Tabelas de contingência:** organizam os casos por duas características. Para condicionar, lê-se **apenas a linha (ou coluna) da condição** e divide-se pela sua totalidade.
- **Atenção:** $P(A|B)$ e $P(B|A)$ são, em geral, **diferentes** — a condição muda o conjunto de casos possíveis. Só são iguais em situações particulares.

Exercícios

1. Definição: sabendo que $P(A \cap B) = 0,24$ e $P(B) = 0,6$, calcula $P(A|B)$.

2. Duas condicionadas: com $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ e $P(A \cap B) = 0,2$, calcula $P(A|B)$ e $P(B|A)$ e compara os resultados.

3. Tabela de contingência: numa população de 200 pessoas há 120 homens e 80 mulheres; fumam 48 homens e 16 mulheres. Calcula a) $P(\text{fumador} | \text{homem})$ · b) $P(\text{fumador} | \text{mulher})$ · c) $P(\text{homem} | \text{fumador})$.

4. Sem reposição: uma caixa tem 3 bolas brancas e 2 pretas. Retiram-se, ao acaso e sem reposição, duas bolas. Calcula a probabilidade de: a) ambas brancas · b) ambas pretas · c) uma de cada cor. Confirma que as três somam 1.

5. Regra do produto: sabendo que $P(B) = 0,5$ e $P(A|B) = 0,7$, calcula $P(A \cap B)$.

6. Com reposição: na mesma caixa da questão 4 (3 brancas e 2 pretas), a primeira bola é *reposta* antes de retirar a segunda. Calcula a probabilidade de ambas serem brancas e compara com o resultado da questão 4.

7. Dado: no lançamento de um dado equilibrado, calcula $P(\text{sair par} \mid \text{sair número maior que 3})$ e compara com $P(\text{sair par})$.

8. Caso particular: mostra que, se $B \subset A$ (com $P(B) > 0$), então $P(A|B) = 1$. Explica o resultado em termos do espaço reduzido.

9. Condicionada inversa: sabendo que $P(A|B) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ e $P(A) = 0,5$, determina $P(B|A)$.

10. Contexto real: numa escola com 500 alunos, 300 são raparigas e 200 rapazes. Praticam desporto federado 180 raparigas e 160 rapazes. Calcula a probabilidade de um aluno praticar desporto, sabendo que é rapaz, e sabendo que é rapariga. Em que grupo a prática é relativamente mais frequente?

11. Justificação: explica por que razão $P(A|B)$ e $P(B|A)$ podem tomar valores diferentes, usando a questão 3 como exemplo.

12. (Python) O programa seguinte calcula três probabilidades condicionadas a partir dos dados da questão 3. Executa-o e indica exatamente o que é impresso.

```
homens, fumantes_homens = 120, 48
mulheres, fumantes_mulheres = 80, 16

print('P(fumador | homem):', fumantes_homens / homens)
print('P(fumador | mulher):', fumantes_mulheres / mulheres)
print('P(homem | fumador):', fumantes_homens / (fumantes_homens + fumantes_mulheres))
```

Dica: nas árvores, o **denominador só aparece no fim**: multiplica-se ao longo do caminho (regra do produto) e só se divide quando for preciso normalizar. E não confundas as duas condicionadas: em $P(A|B)$ o universo passa a ser B, em $P(B|A)$ passa a ser A — é por isso que os valores diferem.

Soluções — Probabilidade condicionada

1. $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = 0,24/0,6 = 0,4$.

2. $P(A|B) = 0,2/0,4 = 0,5$ e $P(B|A) = 0,2/0,5 = 0,4$. Os valores são diferentes porque o espaço se reduz a B no primeiro caso e a A no segundo. Note-se ainda que $P(A|B) = 0,5 = P(A)$ e $P(B|A) = 0,4 = P(B)$: estes acontecimentos são independentes.

3. a) $P(\text{fumador} | \text{homem}) = 48/120 = 0,4$ · b) $P(\text{fumador} | \text{mulher}) = 16/80 = 0,2$ · c) há $48 + 16 = 64$ fumadores, logo $P(\text{homem} | \text{fumador}) = 48/64 = 0,75$. Repara que em (a) e (b) se divide pelo total de cada sexo, enquanto em (c) se divide pelo total de fumadores.

4. a) $P(1.ª \text{ branca}) = 3/5$ e, sem reposição, $P(2.ª \text{ branca} | 1.ª \text{ branca}) = 2/4$, logo $P(\text{ambas brancas}) = 3/5 \times 2/4 = 3/10$ · b) de modo análogo, $P(\text{ambas pretas}) = 2/5 \times 1/4 = 1/10$ · c) $P(\text{uma de cada}) = P(\text{branca depois preta}) + P(\text{preta depois branca}) = 3/5 \times 2/4 + 2/5 \times 3/4 = 6/20 + 6/20 = 3/5$. Soma: $3/10 + 1/10 + 3/5 = 0,3 + 0,1 + 0,6 = 1$ ✓

5. Pela regra do produto: $P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B) = 0,5 \times 0,7 = 0,35$.

6. Com reposição, a composição da caixa volta a ser a inicial na segunda extração: $P(2.ª \text{ branca} | 1.ª \text{ branca}) = 3/5$. Logo $P(\text{ambas brancas}) = 3/5 \times 3/5 = 9/25 = 0,36$, valor maior do que os $3/10 = 0,3$ da questão 4: retirar sem reposição reduz a probabilidade de repetir a mesma cor, porque diminui o número de bolas dessa cor.

7. $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{\text{«maior que 3»} = \{4, 5, 6\}\}$, com $A \cap B = \{4, 6\}$. Então $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = (2/6)/(3/6) = 2/3$, enquanto $P(A) = 1/2$. Condicionar em B faz aumentar a probabilidade, porque no espaço reduzido $\{4, 5, 6\}$ há dois números pares em três possíveis.

8. Se $B \subset A$, todos os resultados de B pertencem a A, logo $A \cap B = B$ e $P(A \cap B) = P(B)$. Então $P(A|B) = P(B)/P(B) = 1$. Em termos do espaço reduzido: sabendo que B ocorreu, estamos a considerar apenas resultados que já pertencem a A, pelo que A ocorre certamente. Trata-se do acontecimento *certo* dentro do espaço condicionado B.

9. Pela regra do produto, $P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B) = 0,4 \times 0,5 = 0,2$. Logo $P(B|A) = P(A \cap B)/P(A) = 0,2/0,5 = 0,4$. (Coincide com $P(B)$, o que confirma que A e B são independentes.)

10. $P(\text{desporto} | \text{rapaz}) = 160/200 = 0,8$ e $P(\text{desporto} | \text{rapariga}) = 180/300 = 0,6$. A prática desportiva é relativamente mais frequente nos rapazes: 80% contra 60%. Repara que, em números absolutos, há mais raparigas a praticar desporto (180 contra 160) — mas a comparação correta é feita *dentro de cada grupo*, porque os grupos têm tamanhos diferentes.

11. $P(A|B)$ e $P(B|A)$ dividem por totais diferentes: na questão 3, $P(\text{fumador} | \text{homem}) = 48/120$ divide pelo número de homens, enquanto $P(\text{homem} | \text{fumador}) = 48/64$ divide pelo número de fumadores. Como $120 \neq 64$, os resultados diferem (0,4 e 0,75). Em geral, condicionar muda o **universo de casos possíveis**: $P(A|B)$ restringe o espaço a B e $P(B|A)$ restringe-o a A. Só quando os totais coincidem (ou quando os acontecimentos são independentes) é que os dois valores podem ser iguais.

12. O programa imprime: **$P(\text{fumador} | \text{homem})$: 0.4 · $P(\text{fumador} | \text{mulher})$: 0.2 · $P(\text{homem} | \text{fumador})$: 0.75** — exatamente os valores obtidos na questão 3. Cada linha faz uma divisão por um total diferente: nas duas primeiras o denominador é o número de homens (120) e de mulheres (80); na terceira é o total de fumadores ($48 + 16 = 64$).

Nota: ao condicionar, o denominador muda de significado: deixa de ser |S| e passa a ser o número de casos em que a condição se verifica. É este o sentido da «redução do espaço de resultados» e a razão pela qual $P(A \cap B)/P(B)$ e $P(A \cap B)/P(A)$ dão, em geral, valores distintos.