

Ficha 2 — Propriedades das primitivas e combinações lineares

12.º Ano

Matemática A

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: aplicar a **linearidade** da primitivação para determinar primitivas de somas e de múltiplos de funções da tabela imediata, e usar uma condição inicial para escolher uma primitiva concreta.

Revisão rápida — linearidade da primitivação

- **Fator constante:** $\int k \cdot f(x) \, dx = k \cdot \int f(x) \, dx$, para qualquer constante k . Um fator constante **pode sair** para fora do integral.
- **Soma:** $\int [f(x) + g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$. Uma primitiva de uma soma é a soma das primitivas — primitiva-se **termo a termo**.
- Destas duas propriedades resulta a **linearidade**: $\int [a \cdot f(x) + b \cdot g(x)] \, dx = a \cdot \int f(x) \, dx + b \cdot \int g(x) \, dx$, com a, b constantes.
- **Uma só constante.** Ao primitivar termo a termo, cada parcela «traria» a sua constante, mas todas se agrupam numa única constante C . Escrever várias constantes é erro de notação.
- **Porquê:** estas propriedades resultam de a **derivação ser linear** — $(kf)' = kf'$ e $(f + g)' = f' + g'$. Como a primitivação é o processo inverso, herda a mesma estrutura.
- **Atenção:** a linearidade **não** se estende ao produto nem ao quociente: $\int [f(x) \cdot g(x)] \, dx$ **não** é, em geral, igual a $\int f(x) \, dx \cdot \int g(x) \, dx$.

Exercícios

1. Justifica, recorrendo à derivada, por que razão um fator constante pode sair para fora do integral: $\int 3f(x) \, dx = 3 \int f(x) \, dx$.

2. Determina $\int (5x^3 + 2x - 1) \, dx$ aplicando a linearidade termo a termo.

3. Determina $\int (4 \cos x - 3 \sin x) \, dx$. Cuidado com os sinais.

4. Determina $\int (6x^5 - 2/x + e^x) dx$, definida para $x > 0$.

5. Determina $\int (x^3 - 2x + 7) dx$ e explica porque é que se escreve apenas uma constante C, embora se tenham primitivado três parcelas.

6. Determina $\int (e^x/2) dx$ e $\int (3/x) dx$, $x > 0$, comentando a diferente forma de tratamento do fator constante.

7. Determina a primitiva de $f(x) = 4x^3 - 6x$ que satisfaz $F(1) = 5$.

8. Determina $\int (2/x + 5e^x) dx$, para $x > 0$, e conclui se a primitiva obtida é correta, derivando-a.

9. Determina $\int (x^2 + 1/x^2) dx$, para $x \neq 0$. *Sugestão:* escreve $1/x^2$ como potência de expoente negativo.

10. Verifica, por derivação, se $F(x) = x^4/4 - x^2 + 7x$ é uma primitiva de $f(x) = x^3 - 2x + 7$.

11. Determina a primitiva de $f(x) = 2/x + 5e^x - 3x^2$, com $x > 0$, que satisfaz $F(1) = 5e$.

12. Justificação: explica por que razão a propriedade $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ é válida, e mostra com um exemplo que uma propriedade análoga para o produto seria falsa.

Soluções — Propriedades das primitivas

1. Seja G uma primitiva de f , isto é, $G' = f$. Considera-se $H(x) = 3G(x)$. Pela regra da derivada do produto por uma constante, $H'(x) = 3G'(x) = 3f(x)$ — logo H é uma primitiva de $3f$. Assim $\int 3f(x) \, dx = 3G(x) + C = 3\int f(x) \, dx$. A propriedade resulta diretamente de a derivada «deixar sair» o fator constante: $(kG)' = kG'$.

2. Primitivando termo a termo: $\int (5x^3 + 2x - 1) \, dx = 5 \cdot x^4/4 + 2 \cdot x^2/2 - 1 \cdot x + C = 5x^4/4 + x^2 - x + C$. Verificação: a derivada é $5x^3 + 2x - 1 \checkmark$.

3. $\int (4 \cos x - 3 \sin x) \, dx = 4 \sin x - 3(-\cos x) + C = 4 \sin x + 3 \cos x + C$. O sinal é a armadilha: a primitiva de $\sin x$ é $-\cos x$, pelo que o termo $-3 \sin x$ contribui $+3 \cos x$. Verificação: $(4 \sin x + 3 \cos x)' = 4 \cos x - 3 \sin x \checkmark$.

4. $\int (6x^5 - 2/x + e^x) \, dx = 6 \cdot x^6/6 - 2 \ln x + e^x + C = x^6 - 2 \ln x + e^x + C$ (para $x > 0$, $\ln |x| = \ln x$). Verificação: $(x^6 - 2 \ln x + e^x)' = 6x^5 - 2/x + e^x \checkmark$.

5. $\int (x^3 - 2x + 7) \, dx = x^4/4 - 2 \cdot x^2/2 + 7x + C = x^4/4 - x^2 + 7x + C$. Escreve-se **uma só** constante C — e não $C_1 + C_2 + C_3$ — porque a soma de constantes arbitrárias é ainda uma constante arbitrária: $C_1 + C_2 + C_3 = C$. Como o que se procura é «a família das primitivas», basta representá-la com um único parâmetro.

6. $\int (e^x/2) \, dx = (1/2) \int e^x \, dx = e^x/2 + C$ (o fator constante $1/2$ sai do integral). $\int (3/x) \, dx = 3 \int (1/x) \, dx = 3 \ln x + C$, para $x > 0$. Em ambos os casos aplicou-se a mesma propriedade — o fator constante sai — embora num caso multiplique uma exponencial e no outro o inverso de x .

7. A família das primitivas é $\int (4x^3 - 6x) \, dx = 4 \cdot x^4/4 - 6 \cdot x^2/2 + C = x^4 - 3x^2 + C$. Impondo $F(1) = 5$: $1^4 - 3 \times 1^2 + C = 1 - 3 + C = -2 + C = 5$, donde **$C = 7$** . Logo **$F(x) = x^4 - 3x^2 +$**

7. Verificação: $F'(x) = 4x^3 - 6x \checkmark$ e $F(1) = 1 - 3 + 7 = 5 \checkmark$.

8. $\int (2/x + 5e^x) \, dx = 2 \ln x + 5e^x + C$ (para $x > 0$). Verificação por derivação: $(2 \ln x + 5e^x + C)' = 2/x + 5e^x \checkmark$ — obtém-se exatamente a função inicial, logo a primitiva está correta.

9. Escreve-se $1/x^2 = x^{-2}$. Com $n = -2$ ($n \neq -1$): $\int x^{-2} \, dx = x^{-1}/(-1) + C = -1/x + C$. Logo $\int (x^2 + 1/x^2) \, dx = x^3/3 + (-1/x) + C = x^3/3 - 1/x + C$, para $x \neq 0$. Verificação: $(x^3/3 - 1/x)' = x^2 - (-1/x^2) = x^2 + 1/x^2 \checkmark$. Note-se o **duplo sinal**: o expoente passa a -1 (dividindo por -1) e, ao derivar, o $-1/x$ volta a dar $+1/x^2$.

10. Derivando F : $F'(x) = 4x^3/4 - 2x + 7 = x^3 - 2x + 7$, que é exatamente $f(x)$. **Sim**, F é primitiva de f . (Repare-se que F poderia ser escrita como $x^4/4 - x^2 + 7x + 0$, ou seja, é a primitiva desta função com a constante $C = 0$.)

11. A família das primitivas é $2 \ln x + 5e^x - 3 \cdot x^3/3 + C = 2 \ln x + 5e^x - x^3 + C$. Impondo $F(1) = 5e$: $2 \ln 1 + 5e^1 - 1^3 + C = 0 + 5e - 1 + C = 5e$, donde **$C = 1$** . Logo **$F(x) = 2 \ln x + 5e^x - x^3 + 1$** . Verificação: $F'(x) = 2/x + 5e^x - 3x^2 \checkmark$ e $F(1) = 0 + 5e - 1 + 1 = 5e \checkmark$.

12. A propriedade da soma é válida porque **a derivada é linear**: se F é primitiva de f e G é primitiva de g , então $(F + G)' = F' + G' = f + g$, pelo que $F + G$ é uma primitiva de $f + g$ — e por isso $\int (f + g) = \int f + \int g$. Para o **produto** a propriedade análoga seria falsa: toma-se $f(x) = x$ e $g(x) = x$. Então $\int f(x) \, dx \cdot \int g(x) \, dx = (x^2/2) \cdot (x^2/2) = x^4/4$, cuja derivada é x^3 ; mas o produto é $f(x)g(x) = x^2$, cuja primitiva é $x^3/3$. Como **$x^4/4$ e $x^3/3$ não diferem por uma constante**, $x^4/4$ não é primitiva de x^2 — o «produto de primitivas» não é a primitiva do produto. A razão de fundo é que $(F \cdot G)' = F'G + FG' \neq F'G'$, ou seja, a derivada do produto «mistura» as duas funções.

Nota: a linearidade é o que permite primitivar **qualquer combinação linear** das seis funções da tabela imediata — é a ferramenta mais usada desta unidade. Mas só para somas e múltiplos constantes: nunca a estendas a produtos ou quocientes.