

Teste de Matemática — Primitivas imediatas e integrais definidos (12.º Ano)

10 questões

20 valores

3 páginas

Instruções: responde a todas as questões, apresentando os cálculos e as justificações. Cada questão vale 2 valores. As soluções encontram-se na página 3.

Grupo I — Primitivas imediatas

1. (2 valores) Determina $\int (3x^2 - 2x + 1) dx$ e verifica o resultado por derivação.

2. (2 valores) Determina $\int (1/x^2) dx$, para $x \neq 0$.

3. (2 valores) Determina $\int (2 \cos x - \sin x) dx$.

4. (2 valores) Determina a primitiva de $f(x) = 4x^3 - 2$ que satisfaz $F(0) = 3$.

Grupo II — Integrais definidos

5. (2 valores) Calcula $\int_1^3 (2x + 1) dx$.

6. (2 valores) Calcula $\int_0^2 e^x dx$ e apresenta o valor exato e o arredondado a três casas decimais.

7. (2 valores) Calcula $\int_1^4 (1/\sqrt{x}) dx$, começando por determinar a primitiva da função integranda.

Grupo III — Áreas e Teorema Fundamental do Cálculo

8. (2 valores) Calcula $\int_0^1 (x^2 + 1) dx$ e interpreta o resultado como área.

9. (2 valores) Calcula $\int_{-1}^1 x^3 dx$ e determina a área geométrica da região compreendida entre o gráfico e o eixo Ox nesse intervalo. Explica a diferença entre os dois valores.

10. (2 valores) Enuncia a 2.ª parte do Teorema Fundamental do Cálculo (regra de Barrow) e explica por que razão o valor do integral definido não depende da primitiva escolhida.

Soluções — Primitivas imediatas e integrais definidos

1. Primitivando termo a termo: $\int (3x^2 - 2x + 1) dx = 3 \cdot x^3/3 - 2 \cdot x^2/2 + x + C = x^3 - x^2 + x + C$. Verificação por derivação: $(x^3 - x^2 + x)' = 3x^2 - 2x + 1$ ✓ — obtém-se a função integranda, pelo que a primitiva está correta.

2. Escreve-se $1/x^2 = x^{-2}$. Com $n = -2$ ($n \neq -1$, logo a regra aplica-se): $\int x^{-2} dx = x^{-1}/(-1) + C = -1/x + C$, para $x \neq 0$. Verificação: $(-1/x)' = -(-1/x^2) = 1/x^2$ ✓ (duplo sinal: o expoente desce para -1 e a derivação volta a dar -2).

3. $\int (2 \cos x - \sin x) dx = 2 \sin x - (-\cos x) + C = 2 \sin x + \cos x + C$. O sinal é a armadilha: a primitiva de $\sin x$ é $-\cos x$, pelo que $-\sin x$ contribui $+\cos x$. Verificação: $(2 \sin x + \cos x)' = 2 \cos x - \sin x$ ✓.

4. A família das primitivas é $\int (4x^3 - 2) dx = 4 \cdot x^4/4 - 2x + C = x^4 - 2x + C$. Impondo $F(0) = 3$: $0 - 0 + C = 3$, donde $C = 3$. Logo $F(x) = x^4 - 2x + 3$. Verificação: $F'(x) = 4x^3 - 2$ ✓ e $F(0) = 3$ ✓.

5. A primitiva de $2x + 1$ é $x^2 + x$. Logo $\int_1^3 (2x + 1) dx = [x^2 + x]_1^3 = (9 + 3) - (1 + 1) = 12 - 2 = 10$.

6. $\int_0^2 e^x dx = [e^x]_0^2 = e^2 - e^0 = e^2 - 1$. Numericamente: $e^2 \approx 7,389056$, logo o valor é $\approx 6,389$ (a três casas decimais).

7. Escreve-se $1/\sqrt{x} = x^{-1/2}$; a sua primitiva é $x^{1/2}/(1/2) = 2\sqrt{x}$. Logo $\int_1^4 (1/\sqrt{x}) dx = [2\sqrt{x}]_1^4 = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1} = 4 - 2 = 2$.

8. $\int_0^1 (x^2 + 1) dx = [x^3/3 + x]_0^1 = (1/3 + 1) - 0 = 4/3 \approx 1,333$. Como $f(x) = x^2 + 1$ é positiva em $[0, 1]$, o integral é a área da região limitada pelo gráfico, pelo eixo Ox e pelas retas $x = 0$ e $x = 1$. Faz sentido que seja superior a 1 (a altura mínima da função é 1) e inferior a $2 \times 1 = 2$ (a altura máxima é 2) — o valor 1,333 situa-se entre esses extremos, como seria de esperar.

9. $\int_{-1}^1 x^3 dx = [x^4/4]_{-1}^1 = 1/4 - 1/4 = 0$. A função $f(x) = x^3$ é ímpar: no intervalo $[-1, 0]$ é negativa e no intervalo $[0, 1]$ é positiva, e as duas regiões têm a mesma área (1/4 cada). O integral mede a área com sinal, pelo que as duas parcelas se cancelam e o resultado é 0. A área geométrica é $1/4 + 1/4 = 1/2$: obtém-se integrando os dois troços separadamente e somando os módulos — a área geométrica nunca é negativa nem nula por cancelamento.

10. A 2.ª parte do Teorema Fundamental do Cálculo (regra de Barrow) afirma: se F é uma primitiva de f em $[a, b]$, então $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, escrevendo-se $[F(x)]_a^b$. O valor não depende da primitiva escolhida porque duas primitivas quaisquer de f diferem por uma constante: se G é outra primitiva, então $G(x) = F(x) + C$. Calculando pela primitiva G obtém-se $G(b) - G(a) = [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a)$ — a constante anula-se na subtração. Por isso se escolhe sempre a primitiva mais simples (com $C = 0$) sem que o resultado se altere. Condição de aplicação: f tem de ser contínua em $[a, b]$.

Nota: as questões 9 e 10 testam as duas ideias mais subtis do tema — a diferença entre área com sinal e área geométrica, e a razão profunda pela qual «qualquer» primitiva serve.