

Resumo — Primitivas imediatas e integrais definidos

12.º Ano

Matemática A

2 páginas

Síntese

Esta síntese reúne o tema opcional das primitivas e integrais do 12.º ano: definição de primitiva, tabela de primitivas imediatas, linearidade, integral definido e cálculo de áreas, e o Teorema Fundamental do Cálculo.

1. Primitiva e primitivação

- F é **primitiva** de f num intervalo se $F'(x) = f(x)$ nesse intervalo. Primitivar é o processo **inverso** de derivar.
- Se F é primitiva de f, então **F + C** também é, para qualquer constante C (a derivada de uma constante é 0). Escreve-se $\int f(x) \, dx = F(x) + C$ — a «família das primitivas».
- Toda a função **contínua** num intervalo é primitivável.
- Não existe regra geral de primitivação: para verificar uma primitiva, **deriva-se** e confirma-se que se obtém a função inicial.

2. Tabela de primitivas imediatas

f(x)	$\int f(x) \, dx$	Nota
k	$kx + C$	constante
$x^n \, (n \neq -1)$	$x^{n+1}/(n+1) + C$	expoente sobe 1; divide-se por ele
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$(2/3)x^{3/2} + C$	caso particular de x^n
$1/\sqrt{x} = x^{-1/2}$	$2\sqrt{x} + C$	o expoente sobe para +1/2
e^x	$e^x + C$	igual à sua primitiva
$1/x$	$\ln x + C$	módulo: cobre $x < 0$
$\sin x$	$-\cos x + C$	atenção ao sinal
$\cos x$	$\sin x + C$	—

3. Linearidade

- Fator constante:** $\int k \cdot f(x) \, dx = k \cdot \int f(x) \, dx$.
- Soma:** $\int [f(x) + g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$ — primitiva-se **termo a termo**.
- Consequência: $\int [a \cdot f(x) + b \cdot g(x)] \, dx = a \int f(x) \, dx + b \int g(x) \, dx$, com a, b constantes.
- Escreve-se **uma só** constante C: a soma de constantes arbitrárias é ainda uma constante.
- A linearidade **não** se estende a produtos nem a quocientes: $\int [f \cdot g] \neq (\int f) \cdot (\int g)$.

4. Integral definido e área

- Notação: $\int_a^b f(x) \, dx$; a é o limite inferior, b o limite superior.
- Se f é **contínua e não negativa** em [a, b], $\int_a^b f(x) \, dx$ é a **área** da região entre o gráfico, o eixo Ox e as retas $x = a$ e $x = b$.
- Se f toma valores **negativos**, o integral é a **área com sinal**: as regiões abaixo do eixo Ox contam negativamente. Por isso $\int_{-1}^1 x^3 \, dx = 0$ (função ímpar), embora a área geométrica seja 1/2.
- Propriedades: $\int_a^a f = 0$; $\int_a^b f = -\int_b^a f$; aditividade $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.
- Área entre dois gráficos:** se $f \geq g$ em [a, b], a área é $\int_a^b [f(x) - g(x)] \, dx$.
- Área geométrica** (sempre positiva): localizar os zeros de f, integrar em cada troço de sinal constante e somar os **módulos**.

5. Teorema Fundamental do Cálculo

- **1.ª parte.** Se f é contínua em I e $a \in I$, então $F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$ é derivável em I e $F'(x) = f(x)$. Derivar a função integral devolve a função inicial.
- **2.ª parte (regra de Barrow).** Se F é uma qualquer primitiva de f em $[a, b]$, então $\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$, escrevendo-se $[F(x)]_a^b$.
- O valor **não depende** da primitiva escolhida: duas primitivas diferem por uma constante, que se anula na diferença $F(b) - F(a)$. Usa-se a mais simples ($C = 0$).
- **Significado:** derivar e integrar são operações **inversas** — é isto que permite calcular áreas recorrendo a primitivas.
- **Condições:** f tem de ser contínua em $[a, b]$; se houver descontinuidades, subdivide-se o intervalo.
- **Erro de sinal:** a ordem é $F(b) - F(a)$ — substitui-se o limite **superior primeiro**.

6. Exemplos verificados

Integral	Primitiva / resultado	Valor
$\int_0^2 3x^2 \, dx$	$[x^3]$	8
$\int_0^1 x^2 \, dx$	$[x^3/3]$	$1/3 \approx 0,333$
$\int_0^\pi \sin x \, dx$	$[-\cos x]$	2
$\int_1^e (1/x) \, dx$	$[\ln x]$	1
$\int_0^2 e^x \, dx$	$[e^x]$	$e^2 - 1 \approx 6,389$
$\int_1^4 \sqrt{x} \, dx$	$[(2/3)x^{3/2}]$	$14/3 \approx 4,667$
$\int_1^2 (1/x) \, dx$	$[\ln x]$	$\ln 2 \approx 0,693$
$\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$	$[\sin x]$	1
$\int_0^1 (x - x^2) \, dx$	$[x^2/2 - x^3/3]$	$1/6 \approx 0,167$
$\int_0^{\pi/4} (1/\cos^2 x) \, dx$	$[\tan x]$	1

7. Erros frequentes a evitar

- Omitir a constante C ao determinar uma primitiva — dá apenas uma primitiva, não a família.
- Escrever $C_1 + C_2 + C_3$ em vez de uma única constante C .
- Primitivar $\sin x$ como $\cos x$ (é **$-\cos x$**) e esquecer o sinal em $-3 \sin x$.
- Aplicar a linearidade a um produto ou a um quociente.
- Esquecer o módulo em $\ln |x|$ quando o domínio inclui valores negativos.
- Confundir **área com sinal** (o integral) com **área geométrica** (o integral do módulo).
- Inverter a ordem em $F(b) - F(a)$, trocando o sinal do resultado.
- Aplicar a regra de Barrow num intervalo onde a função não é contínua.

Controlo rápido: a primitiva de $1/x^2$ é $-1/x$ (o expoente sobe de -2 para -1 , com o sinal); $\int_1^4 \sqrt{x} \, dx = 14/3$; $\int_0^\pi \cos x \, dx = 0$ mas a área geométrica é 2 — porque há duas regiões iguais de sinais opostos que se cancelam. Se te pedirem «área», procura primeiro os zeros da função.