

Ficha 1 — Primitivas imediatas

12.º Ano

Matemática A

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: compreender a primitivação como processo inverso da derivação, aplicar a tabela de primitivas imediatas e determinar primitivas de funções simples, verificando sempre o resultado por derivação.

Revisão rápida — primitivação

- Definição.** F é uma **primitiva** de f num intervalo se $F'(x) = f(x)$ para todo o x desse intervalo. Primitivar é, por isso, o processo **inverso** de derivar.
- Constante de integração.** Se F é primitiva de f , então $F + C$ também é, para qualquer constante C — porque a derivada de uma constante é 0. Por isso se escreve $\int f(x) \, dx = F(x) + C$ e se fala de «a família das primitivas».
- Primitivável.** Uma função com primitiva no intervalo diz-se primitivável; toda a função contínua num intervalo é primitivável.
- Verificação obrigatória.** Como não há regra geral de primitivação, a melhor prova de que uma primitiva está correta é **derivá-la** e confirmar que se obtém a função inicial.

$f(x)$	$\int f(x) \, dx$	Observação
k (constante)	$kx + C$	—
x^n ($n \neq -1$)	$x^{n+1}/(n + 1) + C$	o expoente sobe uma unidade e divide-se por ele
e^x	$e^x + C$	a única função igual à sua primitiva
$1/x$	$\ln x + C$	usa-se o módulo porque $1/x$ existe para $x < 0$
$\text{sen } x$	$-\cos x + C$	atenção ao sinal
$\cos x$	$\text{sen } x + C$	—

Exercícios

1. Mostra, por derivação, que $F(x) = x^3$ é uma primitiva de $f(x) = 3x^2$. Indica depois outra primitiva de f .

2. Determina a família das primitivas de $f(x) = x^4$ e verifica o resultado por derivação.

3. Determina $\int 7 \, dx$ e $\int x^2 \, dx$, explicando em cada caso a regra da tabela utilizada.

4. Determina $\int \sqrt{x} \, dx$ e verifica o resultado derivando a primitiva obtida.

5. Determina $\int (1/\sqrt{x}) \, dx$, escrevendo primeiro a função em potência e usando a regra de x^n .

6. Determina $\int e^x \, dx$ e explica por que razão esta primitiva é particularmente simples.

7. Determina $\int (1/x) \, dx$, referindo o domínio e explicando por que razão se escreve $\ln |x|$ com módulo.

8. Determina $\int \sin x \, dx$ e $\int \cos x \, dx$, tendo cuidado com o sinal.

9. Determina uma primitiva de $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ que satisfaça $F(0) = 7$.

10. Determina uma primitiva de $f(x) = 2e^x + 3/x$, definida para $x > 0$, que satisfaça $F(1) = 2e$.

11. Determina uma primitiva de $f(x) = 2 \sin x + \cos x$ que satisfaça $F(\pi/2) = 3$.

12. Justificação: explica por que razão não existe uma regra de primitivação para o produto análoga à regra da derivada do produto, e indica como se confirma, em qualquer caso, que uma primitiva está correta.

Soluções — Primitivas imediatas

1. Derivando: $F'(x) = (x^3)' = 3x^2$, que é exatamente $f(x)$ — logo F é primitiva de f . Outra primitiva é, por exemplo, $F(x) + 1 = x^3 + 1$: derivando obtém-se de novo $3x^2$, porque a derivada da constante 1 é 0. Qualquer função $x^3 + C$ é primitiva de $3x^2$.
 2. Aplicando a regra de x^n com $n = 4$: $\int x^4 dx = x^5/5 + C$. Verificação por derivação: $(x^5/5 + C)' = 5x^4/5 + 0 = x^4 \checkmark$ — confirma-se que a primitiva obtida é correta.
 3. $\int 7 dx = 7x + C$, pela regra da constante ($k = 7$). $\int x^2 dx = x^3/3 + C$, pela regra de x^n com $n = 2$ (o expoente sobe para 3 e divide-se por 3). Verificação: $(7x + C)' = 7 \checkmark$ e $(x^3/3 + C)' = 3x^2/3 = x^2 \checkmark$.
 4. Escreve-se $\sqrt{x} = x^{1/2}$ e aplica-se a regra de x^n com $n = 1/2$: $\int x^{1/2} dx = x^{3/2}/(3/2) + C = (2/3)x^{3/2} + C = (2/3)\sqrt{x^3} + C$. Verificação: a derivada de $(2/3)x^{3/2}$ é $(2/3) \times (3/2)x^{1/2} = x^{1/2} = \sqrt{x} \checkmark$.
 5. Escreve-se $1/\sqrt{x} = x^{-1/2}$. Com $n = -1/2$ ($n \neq -1$, logo a regra aplica-se): $\int x^{-1/2} dx = x^{1/2}/(1/2) + C = 2\sqrt{x} + C$. Verificação: $(2\sqrt{x})' = 2 \times 1/(2\sqrt{x}) = 1/\sqrt{x} \checkmark$. Repare-se que aqui o expoente **sobe** de $-1/2$ para $+1/2$, apesar de a função ser decrescente.
 6. $\int e^x dx = e^x + C$. É particularmente simples porque e^x é a única função (à menos de constante multiplicativa) cuja derivada é igual a si própria: $(e^x)' = e^x$. Primitivar e derivar dão, neste caso, o mesmo resultado.
 7. $\int (1/x) dx = \ln |x| + C$. A função $1/x$ tem domínio constituído por **todos os números reais não nulos**, ou seja, é definida para $x > 0$ e para $x < 0$. Como $\ln x$ só está definido para $x > 0$, é necessário o **módulo** para cobrir também os valores negativos do domínio: em cada um dos intervalos $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$ a primitiva é $\ln |x| + C$. Verificação para $x < 0$: $(\ln |x|)' = 1/x \checkmark$ (a regra da derivada da composta absorve o sinal).
 8. $\int \sin x dx = -\cos x + C$, pois $(-\cos x)' = \sin x$. O sinal negativo é a armadilha mais frequente: a primitiva de $\sin x$ **não** é $\cos x$ — a derivada de $\cos x$ é $-\sin x$, o simétrico do que se pretende. $\int \cos x dx = \sin x + C$, pois $(\sin x)' = \cos x$.
 9. A família das primitivas é $\int (3x^2 - 4x + 5) dx = x^3 - 2x^2 + 5x + C$ (aplica-se a regra de x^n termo a termo). Impondo $F(0) = 7$: $0 - 0 + 0 + C = 7$, donde $C = 7$. Logo $F(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 7$. Verificação: $F'(x) = 3x^2 - 4x + 5 \checkmark$ e $F(0) = 7 \checkmark$.
 10. A família das primitivas é $2e^x + 3 \ln x + C$ (a regra da constante multiplicativa permite tratar cada termo separadamente). Impondo $F(1) = 2e$: $2e^1 + 3 \ln 1 + C = 2e + 0 + C = 2e$, donde $C = 0$. Logo $F(x) = 2e^x + 3 \ln x$. Verificação: $F'(x) = 2e^x + 3/x \checkmark$ e $F(1) = 2e \checkmark$.
 11. A família das primitivas é $-2 \cos x + \sin x + C$. Impondo $F(\pi/2) = 3$: $-2 \cos(\pi/2) + \sin(\pi/2) + C = -2 \times 0 + 1 + C = 1 + C = 3$, donde $C = 2$. Logo $F(x) = -2 \cos x + \sin x + 2$. Verificação: $F'(x) = 2 \sin x + \cos x \checkmark$ (a derivada de $-2 \cos x$ é $+2 \sin x$) e $F(\pi/2) = 0 + 1 + 2 = 3 \checkmark$.
 12. Não existe regra de primitivação para o produto análoga à regra $(uv)' = u'v + uv'$ porque a **primitivação não preserva a estrutura das operações**: enquanto a derivada se distribui de forma previsível sobre somas, produtos e quocientes, o processo inverso não tem essa simetria. A regra da derivada do produto «mistura» as duas funções e os seus fatores, e inverter essa mistura exigiria saber decompor a função inicial de uma forma que não é, em geral, possível por regras elementares — por isso certas primitivas exigem técnicas específicas (como a primitivação por partes, que é um aprofundamento) e outras nem se exprimem por funções elementares. Em qualquer caso, a confirmação passa sempre pela **derivação**: se $F'(x) = f(x)$, então F é primitiva de f — este teste é a prova universal, independentemente de como a primitiva foi obtida.
- Nota:** nesta ficha as primitivas vêm todas da **tabela imediata**. Não esqueças a constante C — a sua omissão é o erro mais penalizado, porque significa que se deu apenas *uma* primitiva em vez de *a família* das primitivas.