

Ficha 9 — Problemas de otimização

12.º Ano

Matemática A

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: modelar situações reais por meio de uma função, restringir o domínio ao contexto do problema, localizar o máximo ou o mínimo com o auxílio da derivada e confirmar a natureza do extremo pelo sinal da derivada ou pela comparação com valores vizinhos.

Revisão rápida — método de otimização

- 1. **Modelar:** identificar a quantidade a otimizar (área, volume, custo, lucro) e exprimi-la em função de **uma só** variável, usando as restrições do enunciado para eliminar as outras.
- 2. **Restringir o domínio:** a variável tem de respeitar o contexto (comprimentos positivos, capacidade da caixa, número de unidades). O domínio é habitualmente um intervalo fechado ou semiaberto.
- 3. **Derivar e resolver:** calcula-se $f'(x)$ e resolvem-se os zeros de f' — são os **candidatos a extremo**.
- 4. **Confirmar a natureza:** estuda-se o **sinal de f'** (positiva antes e negativa depois de $x_0 \Rightarrow$ máximo; negativa antes e positiva depois $\Rightarrow$ mínimo) ou compara-se com valores vizinhos.
- Não esquecer os extremos do intervalo:** num intervalo fechado $[a, b]$, o máximo ou mínimo pode ocorrer em a ou em b , mesmo quando a derivada não se anula aí.
- Fórmulas frequentes:** perímetro do retângulo $2x + 2y$; área $x \times y$; volume da caixa aberta $x(\text{comprimento} - 2x)^2$; área de um retângulo de diagonal fixa d , $x\sqrt{d^2 - x^2}$.

Exercícios

1. **Perímetro fixo:** um retângulo tem perímetro 20 cm. Escreve a sua área em função de um dos lados, indica o domínio e determina as dimensões que a maximizam e o valor dessa área máxima.

2. **Caixa sem tampa:** de uma folha quadrada de cartão com 18 cm de lado cortam-se, em cada canto, quadrados de lado x e dobram-se as abas, obtendo-se uma caixa aberta. Escreve o volume em função de x , indica o domínio e determina o valor de x que maximiza o volume e o volume máximo.

3. **Vedação com muro:** pretende-se vedar uma horta retangular aproveitando um muro já existente num dos lados, com 100 m de rede disponíveis. Escreve a área em função do lado paralelo ao muro, indica o domínio e determina as dimensões de área máxima.

4. Soma fixa: dois números positivos têm soma 20. Mostra que a soma dos seus quadrados é mínima quando são iguais e indica o valor mínimo.

5. Lucro: uma empresa tem receita $R(x) = 100x - x^2$ e custo $C(x) = 20x + 100$ (em euros, para x unidades produzidas). Escreve o lucro em função de x e determina o número de unidades que o maximiza e o lucro máximo.

6. Diagonal fixa: um retângulo tem diagonal 10 cm. Escreve a área em função da base, indica o domínio e mostra que a área máxima corresponde a um quadrado, calculando esse valor.

7. Custo médio: o custo médio por unidade é dado por $C(x) = x + 400/x$, para $x > 0$. Determina o valor de x que minimiza o custo médio e o valor desse custo mínimo, confirmando com valores vizinhos.

8. Função racional: considera $f(x) = x^2 + 4/x$, com $x > 0$. Determina o valor de x que minimiza f e o valor mínimo (seis casas decimais), confirmando com valores vizinhos.

9. Produto por exponencial: determina o máximo da função $f(x) = x e^{-x}$ para $x \geq 0$, indicando o ponto e o valor máximo (seis casas decimais).

10. Vedação em três lados: com 60 m de rede vedam-se três lados de um terreno retangular (o quarto lado é um rio). Determina as dimensões de área máxima e o valor dessa área.

11. Justificação: descreve, por palavras tuas, os quatro passos do método de otimização e explica por que razão é indispensável estudar o sinal da derivada (ou comparar com valores vizinhos) depois de encontrar os seus zeros.

12. (Python) O programa seguinte procura numericamente o máximo do volume da caixa da questão 2, calculando $V(x) = x(18 - 2x)^2$ para valores de x de milésimo em milésimo. Executa-o e indica exatamente o que é impresso, comparando com o resultado analítico.

```
melhor_x = 0
melhor_v = 0
x = 0.0
while x <= 9:
    v = x * (18 - 2 * x) ** 2
    if v > melhor_v:
        melhor_v = v
        melhor_x = x
    x += 0.001
print('Melhor x:', round(melhor_x, 3))
print('Volume maximo:', round(melhor_v, 3))
```

Dica: antes de derivar, reduza sempre o problema a **uma única variável** e escreva o domínio. A maior parte dos erros em otimização não vem do cálculo da derivada, mas de esquecer a restrição do contexto — por exemplo, aceitar um x que daria um lado de comprimento negativo.

Soluções — Problemas de otimização

1. Sendo x um dos lados, o outro é $10 - x$, logo $A(x) = x(10 - x)$, com $D =]0, 10[$. $A'(x) = 10 - 2x = 0 \Rightarrow x = 5$. Como A é uma parábola voltada para baixo (A' positiva antes de 5 e negativa depois), $x = 5$ é maximizante. Dimensões: **5 cm × 5 cm (um quadrado)**, com área máxima **25 cm²** (confirmação: $A(4) = 24$ e $A(6) = 24$, ambos menores).

2. Ao cortar quadrados de lado x e dobrar, a base fica com $18 - 2x$ de lado e a altura é x , logo $V(x) = x(18 - 2x)^2$, com $D =]0, 9[$ (é preciso $2x < 18$). Derivando: $V'(x) = (18 - 2x)^2 + x \times 2(18 - 2x)(-2) = (18 - 2x)[(18 - 2x) - 4x] = (18 - 2x)(18 - 6x)$. Os zeros são $x = 9$ (que não pertence ao domínio, pois anula a base) e $x = 3$. Logo **$x = 3$ cm**, dando aresta da base $18 - 6 = 12$ cm e volume **$V(3) = 3 \times 12^2 = 432$ cm³** (confirmado numericamente na questão 12).

3. Com o lado paralelo ao muro medindo x , os dois lados perpendiculares medem $(100 - x)/2$ cada, logo $A(x) = x(100 - x)/2$, com $D =]0, 100[$. $A'(x) = (100 - 2x)/2 = 0 \Rightarrow x = 50$. Dimensões: **50 m (lado paralelo ao muro) × 25 m**, com área máxima de **1 250 m²**.

4. Sendo um número x e o outro $20 - x$, $S(x) = x^2 + (20 - x)^2 = 2x^2 - 40x + 400$, com $D =]0, 20[$. $S'(x) = 4x - 40 = 0 \Rightarrow x = 10$. Logo os dois números são **iguais a 10** e o mínimo é $S(10) = 100 + 100 = 200$. (Justificação da natureza do extremo sem recorrer a derivadas de ordem superior: $S(x) = 2x^2 - 40x + 400$ é uma parábola com o coeficiente de x^2 positivo, logo tem a concavidade voltada para cima e o seu vértice — que está em $x = 10$ — é um ponto de mínimo.)

5. Lucro = Receita – Custo: $P(x) = (100x - x^2) - (20x + 100) = -x^2 + 80x - 100$. $P'(x) = -2x + 80 = 0 \Rightarrow x = 40$. Como a parábola tem a concavidade voltada para baixo, trata-se de um máximo: **40 unidades**, com lucro $P(40) = -1\,600 + 3\,200 - 100 = 1\,500$ € (confirmação: $P(39) = P(41) = 1\,499$ €, ambos menores).

6. Com base x e altura y tais que $x^2 + y^2 = 100$, tem-se $y = \sqrt{100 - x^2}$ e $A(x) = x\sqrt{100 - x^2}$, com $D =]0, 10[$. Derivando: $A'(x) = \sqrt{100 - x^2} - x^2/\sqrt{100 - x^2} = (100 - 2x^2)/\sqrt{100 - x^2}$. $A'(x) = 0 \Rightarrow 100 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 50 \Rightarrow x = 5\sqrt{2} \approx 7,0711$. Como $y = \sqrt{100 - 50} = 5\sqrt{2} = x$, o retângulo é um **quadrado**, com área máxima $A = (5\sqrt{2})^2 = 50$ cm².

7. $C(x) = x + 400/x$, com $C'(x) = 1 - 400/x^2$. Igualando a zero: $400/x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 400 \Rightarrow x = 20$ (a raiz negativa não pertence ao domínio). Confirmando com vizinhos: $C(19) \approx 40,0526$ e $C(21) \approx 40,0476$, ambos **maiores** do que $C(20) = 40$, logo $x = 20$ dá o custo médio mínimo de 40 (unidades monetárias por unidade produzida).

8. $f(x) = x^2 + 4/x$, com $f'(x) = 2x - 4/x^2$. Igualando a zero: $2x^3 = 4 \Rightarrow x^3 = 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2} \approx 1,259921$. O valor mínimo é $f(\sqrt[3]{2}) = 2^{2/3} + 4/2^{1/3} \approx 1,587401 + 3,174802 = 4,762203$. Confirmação com valores vizinhos: $f(1,25) \approx 4,762500$ e $f(1,27) \approx 4,762506$, ambos maiores, confirmando o mínimo no ponto encontrado.

9. $f(x) = x e^{-x}$. Pela regra do produto: $f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = e^{-x}(1 - x)$. Como $e^{-x} > 0$ para todo o x , $f'(x) = 0$ apenas quando $1 - x = 0$, isto é **$x = 1$** . Para $x < 1$ a derivada é positiva e para $x > 1$ é negativa, logo $x = 1$ é maximizante: **$f(1) = 1 \times e^{-1} = 1/e \approx 0,367879$** . Confirmação: $f(0,9) \approx 0,365913$ e $f(1,1) \approx 0,366158$, ambos menores.

10. Sendo x o lado paralelo ao rio, os dois lados perpendiculares somam $60 - x$, logo cada um mede $(60 - x)/2$ e $A(x) = x(60 - x)/2$, com $D =]0, 60[$. $A'(x) = (60 - 2x)/2 = 0 \Rightarrow x = 30$. Dimensões: **30 m × 15 m**, com área máxima de **450 m²**. Note-se a diferença face à questão 3: com menos rede (60 m em vez de 100 m) e a mesma configuração, a área máxima é menor, como seria de esperar.

11. Os quatro passos são: **(1) modelar** — traduzir o enunciado numa função de uma só variável, usando as restrições para eliminar as restantes; **(2) restringir o domínio** — impor as condições do contexto (comprimentos positivos, capacidade da caixa, etc.); **(3) derivar e resolver $f'(x) = 0$** — obtendo os candidatos a extremo; **(4) confirmar a natureza do extremo**. O passo 4 é indispensável porque $f'(x_0) = 0$ **não garante** que x_0 seja máximo ou mínimo: a derivada anular-se pode corresponder a um máximo, a um mínimo ou a um ponto de inflexão com tangente horizontal. O sinal da derivada (ou, em alternativa, a comparação com valores vizinhos) é o que distingue esses casos: se f' passa de positiva a negativa, há um máximo; de negativa a positiva, um mínimo.

12. O programa imprime: **Melhor x : 3.0 e Volume máximo: 432.0**. A procura é feita de milésimo em milésimo no intervalo $[0, 9]$ e devolve $x = 3,000$ com volume $432,000$ cm³ — exatamente o resultado obtido analiticamente na questão 2 ($V(3) = 3 \times 12^2 = 432$ cm³) e o mesmo que se obteria resolvendo $V'(x) = (18 - 2x)(18 - 6x) = 0$. A concordância entre o método analítico e a busca numérica serve de verificação independente do resultado.

Nota: em muitos problemas de otimização do dia a dia, o ótimo tem uma forma reconhecível — o **quadrado** maximiza a área com perímetro fixo (questões 1 e 6) e a **igualdade** minimiza somas de quadrados com soma fixa (questão 4). Reconhecer estes padrões ajuda a prever o resultado, mas a justificação exige sempre o cálculo da derivada.