

Ficha 6 — Número de Euler e derivadas de e^x e $\ln x$

12.º Ano

Matemática A

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: identificar o número de Euler como o limite das sucessões $(1 + 1/n)^n$, conhecer e aplicar as derivadas de e^x e de $\ln x$, determinar equações de retas tangentes, derivar a^x e compreender por que razão e é a única base para a qual a função coincide com a sua derivada.

Revisão rápida — número e , e^x e $\ln x$

- **Número de Euler:** $e \approx 2,71828$. Obtém-se como o valor para que tende $(1 + 1/n)^n$ quando n cresce indefinidamente: com $n = 10$ obtém-se 2,59374; com $n = 100$, 2,70481; com $n = 1000$, 2,71692 — sempre a aumentar, aproximando-se de e por baixo.
- **Derivada da exponencial de base e :** $(e^x)' = e^x$. É o único caso em que a função e a sua derivada são iguais: o declive da tangente em cada ponto coincide com o valor da função nesse ponto. Em particular, em $x = 0$ o declive é $e^0 = 1$.
- **Derivada do logaritmo natural:** $(\ln x)' = 1/x$, para $x > 0$. Em $x = 1$ o declive é 1; em $x = e$ o declive é $1/e \approx 0,36788$.
- **Derivada da exponencial de base a :** $(a^x)' = \ln a \times a^x$. Como $\ln a = 1$ apenas quando $a = e$, conclui-se que **e é a única base** para a qual $(a^x)' = a^x$.
- **Retas tangentes:** a tangente ao gráfico de f em $x = a$ é $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. Assim, a tangente a e^x em $x = 0$ é $y = x + 1$ e a tangente a $\ln x$ em $x = 1$ é $y = x - 1$.
- **Relação geométrica:** como $y = \ln x$ e $y = e^x$ são simétricas em relação à reta $y = x$, os declives em pontos correspondentes são **inversos um do outro**. Exemplo: em $x = 1$ o declive de e^x é $e \approx 2,71828$ e, no ponto correspondente $(e, 1)$ de $\ln x$, o declive é $1/e \approx 0,36788$ — e o produto é 1.

Exercícios

1. O número e : calcula $(1 + 1/n)^n$ para $n = 10, 100$ e 1000 (cinco casas decimais) e comenta a forma como os valores se aproximam de e . Confirma também que $\ln e = 1$ e que $e^0 = 1$.

2. Derivada de e^x : indica a derivada de $f(x) = e^x$ e determina o declive da reta tangente ao seu gráfico em $x = 0$, interpretando o resultado.

3. Derivada de $\ln x$: indica a derivada de $g(x) = \ln x$ e calcula o declive da reta tangente ao gráfico em $x = 1$ e em $x = e$ (quatro casas decimais).

4. Derivadas imediatas: determina a derivada de cada função: a) $f(x) = 3e^x \cdot b$ b) $g(x) = e^x + x^2 \cdot c$ c) $h(x) = 5 \ln x$.

5. Retas tangentes: determina a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = e^x$ em $x = 0$ e ao gráfico de $g(x) = \ln x$ em $x = 1$.

6. Exponenciais de outras bases: determina a derivada de $f(x) = 2^x$ e de $g(x) = 3^x$ e calcula os seus valores em $x = 1$ (seis casas decimais).

7. A base única: mostra que, para que se tenha $(a^x)' = a^x$ para todo o x , é necessário e suficiente que $a = e$.

8. Combinação das duas: determina a derivada de $h(x) = e^x - \ln x$ e calcula $h'(2)$ (seis casas decimais).

9. Relação geométrica: explica por que razão os declives de $y = e^x$ e $y = \ln x$ em pontos correspondentes (simétricos em relação a $y = x$) são inversos um do outro e verifica-o com o ponto $x = 1$.

10. Aplicação: uma população evolui segundo $P(t) = 1000e^{0.05t}$, com t em anos. Calcula $P(10)$ e determina $P'(0)$ e $P'(10)$, interpretando o significado de cada resultado (quatro casas decimais).

11. Justificação: explica, com as propriedades da exponencial e do logaritmo, por que razão $(e^x)' = e^x$ torna o número e especial entre todas as bases possíveis.

12. (Python) O programa seguinte estima o declive da tangente a $f(x) = e^x$ em $x = 1$ pelo quociente de diferenças (com $h = 0,000001$) e compara-o com o valor exato e^1 . Executa-o e indica exatamente o que é impresso, comentando a pequena diferença final.

```
from math import exp

x = 1
h = 0.000001
derivada = (exp(x + h) - exp(x)) / h
print('Derivada numerica:', round(derivada, 6))
print('Valor de e^x:', round(exp(x), 6))
print('Diferenca:', round(abs(derivada - exp(x)), 8))
```

Dica: a derivada de e^x ser igual a e^x significa que a **taxa de variação instantânea é igual ao próprio valor**. É isso que faz de e a base natural para modelar crescimento contínuo — de populações, de capitais com juro contínuo e de desintegrações radioativas.

Soluções — Número de Euler e derivadas de e^x e $\ln x$

1. $(1 + 1/10)^{10} = 1,1^{10} \approx 2,59374 \cdot (1 + 1/100)^{100} = 1,01^{100} \approx 2,70481 \cdot (1 + 1/1000)^{1000} = 1,001^{1000} \approx 2,71692$. A sucessão é crescente e os valores aproximam-se de $e \approx 2,71828$ **por baixo**, cada vez mais devagar. Confirmações: $\ln e = 1$ (é a base do logaritmo natural) e $e^0 = 1$ (qualquer base elevada a zero dá 1).
 2. $f'(x) = e^x$. Em $x = 0$: $f'(0) = e^0 = 1$. Interpretação: no ponto $(0, 1)$ a reta tangente tem declive 1, ou seja, está inclinada 45° e é exatamente a reta $y = x + 1$.
 3. $g'(x) = 1/x$. Em $x = 1$: $g'(1) = 1/1 = 1 \cdot \text{em } x = e$: $g'(e) = 1/e \approx 0,3679$. O declive diminui à medida que x aumenta: a curva vai ficando cada vez mais «deitada».
 4. a) $f'(x) = 3e^x$ (a constante multiplica) · b) $g'(x) = e^x + 2x$ (derivada da soma) · c) $h'(x) = 5/x$ (para $x > 0$).
 5. Para $f(x) = e^x$ em $x = 0$: $f(0) = 1$ e $f'(0) = 1$, logo $y = 1 + 1(x - 0)$, isto é $y = x + 1$. Para $g(x) = \ln x$ em $x = 1$: $g(1) = 0$ e $g'(1) = 1$, logo $y = 0 + 1(x - 1)$, isto é $y = x - 1$.
 6. $(2^x)' = \ln 2 \times 2^x$. Em $x = 1$: $\ln 2 \times 2 \approx 1,386294$ · $(3^x)' = \ln 3 \times 3^x$. Em $x = 1$: $\ln 3 \times 3 \approx 3,295837$. Note-se que nestas bases o declive **não** coincide com o valor da função (2 e 3, respetivamente).
 7. A derivada de a^x é $\ln a \times a^x$. Para que esta expressão seja igual a a^x para todo o x , é necessário que $\ln a = 1$ (o fator constante tem de valer 1, independentemente do x considerado). Ora $\ln a = 1 \Leftrightarrow a = e^1 \Leftrightarrow a = e$. A condição é também suficiente, porque $(e^x)' = \ln e \times e^x = 1 \times e^x = e^x \checkmark$. Confirma-se assim que e é a **única** base com esta propriedade.
 8. $h'(x) = e^x - 1/x$ (a derivada da soma é a soma das derivadas). Em $x = 2$: $e^2 - 1/2 \approx 7,389056 - 0,5 = 6,889056$.
 9. Se $y = \ln x$ é a reflexão de $y = e^x$ na reta $y = x$, então a cada ponto (a, b) do gráfico da exponencial corresponde o ponto **(b, a)** no gráfico do logaritmo. Uma reflexão na reta $y = x$ troca o papel dos eixos: uma variação de 1 unidade na horizontal passa a ser uma variação de 1 unidade na vertical e vice-versa. Por isso o declive é transformado no seu **inverso**. Verificação em $x = 1$: sobre a exponencial, em $x = 1$ o declive é $e^1 \approx 2,71828$; o ponto correspondente no logaritmo é $(e, 1)$ e aí o declive é $1/e \approx 0,36788$. Como $2,71828 \times 0,36788 \approx 1$, os declives são exatamente **inversos um do outro** $\checkmark$ (o mesmo acontece em $x = 0 \Leftrightarrow (1, 0)$, onde ambos valem 1, o seu próprio inverso).
 10. $P(10) = 1000e^{0,05 \times 10} = 1000e^{0,5} \approx 1\,648,7213$ indivíduos. A derivada é $P'(t) = 1000 \times 0,05 \times e^{0,05t} = 50e^{0,05t}$. No instante inicial: $P'(0) = 50e^0 = 50$ indivíduos por ano — a população começa a crescer à taxa de 50 indivíduos por ano. Ao fim de 10 anos: $P'(10) = 50e^{0,5} \approx 82,4361$ indivíduos por ano. O crescimento acelerou porque a taxa instantânea é proporcional à própria população, que entretanto aumentou.
 11. Para uma base a qualquer, a derivada é $\ln a \times a^x$: a exponencial «devolve-se a si própria», mas multiplicada pelo fator constante $\ln a$. Esse fator mede a escala da base: se $a < e$ então $\ln a < 1$ e a derivada é menor do que a função (a função cresce cada vez mais devagar); se $a > e$ então $\ln a > 1$ e a derivada é maior do que a função (cresce cada vez mais depressa). Em $a = e$ o fator vale exatamente 1 e a derivada coincide com a função em todos os pontos: a taxa de variação instantânea é o valor da função. É esta coincidência — e não qualquer escolha arbitrária — que faz de e a **base natural** do cálculo e a base preferida para modelar fenómenos em que a taxa de crescimento é proporcional à quantidade presente.
 12. O programa imprime: **Derivada numerica: 2.718283 · Valor de e^x: 2.718282 · Diferenca: 1.36e-06**. A primeira linha usa o quociente de diferenças $[f(x+h) - f(x)]/h$ com $h = 0,000001$, obtendo 2,718283; a segunda apresenta o valor exato $e^1 \approx 2,718282$. Os dois valores coincidem até à quinta casa decimal e a diferença é apenas $1,36 \times 10^{-6}$. Essa diferença não é um erro de cálculo, mas sim o **erro de aproximação do quociente de diferenças**: a reta secante com que se aproxima a tangente ainda não é a tangente, e o erro tende para zero à medida que h tende para zero. O resultado confirma numericamente que $(e^x)' = e^x$.
- Nota:** distingue sempre as duas bases especiais: a base **e** dá $(e^x)' = e^x$ (sem fator extra), enquanto qualquer outra base a dá o fator $\ln a$. E o logaritmo natural é o único cujo declive em $x = 1$ é exatamente 1.