

Ficha 3 — Matrizes e transformações geométricas

12.º Ano Matemática A 4 páginas 12 exercícios

Objetivo: interpretar o produto de uma matriz 2×2 por uma matriz coluna como uma **transformação geométrica** do plano (rotação, variação de tamanho, cisalhamento, reflexão) e usar a **soma** de matrizes coluna para representar **translações**.

Revisão rápida — matrizes como transformações

- Um ponto $P(x, y)$ do plano representa-se pela **matriz coluna** $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Multiplicar uma matriz 2×2 por essa coluna dá uma nova coluna: **as coordenadas do ponto transformado**.
- Rotação de 90° (sentido anti-horário):** $R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Leva $(1, 0)$ a $(0, 1)$ e $(0, 1)$ a $(-1, 0)$.
- Rotação de ângulo θ :** $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$. Para $\theta = 180^\circ$ obtém-se $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, que transforma (x, y) em $(-x, -y)$ — a **simetria central** na origem.
- Variação de tamanho (scaling):** $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$ multiplica a abcissa por k e a ordenada por m — estica ou encolhe segundo cada eixo.
- Cisalhamento (shearing) horizontal:** $\begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ leva (x, y) a $(x + cy, y)$: desloca os pontos na horizontal numa quantidade proporcional à ordenada, deixando **intactos** os pontos do eixo Ox .
- Reflexões:** $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ reflete no eixo Oy ; $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ reflete no eixo Ox .
- Translação:** obtém-se **somando** matrizes coluna: $P' = P + T$. A translação **não** pode ser obtida por multiplicação por uma matriz 2×2 — qualquer matriz 2×2 deixa fixa a origem, ao passo que uma translação não nula desloca a origem.
- Composição.** Aplicar primeiro a transformação B e depois a A corresponde ao produto **$A \cdot B$** — a ordem dos fatores é a ordem inversa da aplicação das transformações.

Exercícios

1. Aplica a matriz de rotação de 90° $R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ aos pontos $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(2, 3)$.

2. Aplica a matriz de rotação de 180° , $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, ao ponto $(2, 3)$ e identifica a transformação geométrica correspondente.

3. Calcula o produto $R \cdot R$ com $R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e interpreta geometricamente o resultado.

4. Aplica a matriz $S = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ aos pontos $(1, 1)$ e $(1, 0)$ e descreve o efeito geométrico.

5. Aplica a matriz de cisalhamento horizontal $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ aos pontos $(1, 1)$ e $(0, 1)$. Que pontos do plano ficam fixos por esta transformação?

6. Aplica a matriz de cisalhamento vertical $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ao ponto $(1, 1)$ e compara com o resultado da questão anterior.

7. Aplica a matriz $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ao ponto $(2, 3)$ e identifica a reflexão em causa.

8. Determina as coordenadas do ponto obtido a partir de $(1, 1)$ por translação de vetor $(3, 2)$. Escreve a operação em termos de matrizes coluna.

9. Aplica a matriz de rotação de 60° , $[\cos 60^\circ \ -\sin 60^\circ; \sin 60^\circ \ \cos 60^\circ]$, ao ponto $(1, 0)$ e apresenta o resultado na forma exata e arredondado a três casas decimais.

10. Calcula o produto $R \cdot S$ com $R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $S = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e determina a imagem do ponto $(1, 0)$ pela transformação composta. Explica a ordem em que as transformações são aplicadas.

11. Determinado cisalhamento horizontal fixa o ponto $(0, 1)$ mas não o ponto $(1, 1)$. Indica a matriz do cisalhamento e explica por que razão só os pontos com ordenada nula ficam fixos.

12. Justificação: explica por que razão uma translação não pode ser representada por uma matriz 2×2 , ao contrário das rotações, das variações de tamanho e dos cisalhamentos.

Soluções — Matrizes e transformações geométricas

1. $R: [1; 0] = [0 \times 1 + (-1) \times 0; 1 \times 1 + 0 \times 0] = [0; 1] \rightarrow (0, 1)$. $R: [0; 1] = [0 \times 0 + (-1) \times 1; 1 \times 0 + 0 \times 1] = [-1; 0] \rightarrow (-1, 0)$. $R: [2; 3] = [0 \times 2 + (-1) \times 3; 1 \times 2 + 0 \times 3] = [-3; 2] \rightarrow (-3, 2)$. O ponto $(2, 3)$ «roda» um quarto de volta em torno da origem, passando ao segundo quadrante.

2. $[-1 \ 0; 0 \ -1] \cdot [2; 3] = [-1 \times 2 + 0 \times 3; 0 \times 2 + (-1) \times 3] = [-2; -3] \rightarrow (-2, -3)$. A transformação é a **rotação de 180°** (equivalente à simetria central na origem): cada ponto passa para o ponto diametralmente oposto em relação à origem.

3. $R \cdot R = [0 \ -1; 1 \ 0] \cdot [0 \ -1; 1 \ 0] = [0 \times 0 + (-1) \times 1, 0 \times (-1) + (-1) \times 0; 1 \times 0 + 0 \times 1, 1 \times (-1) + 0 \times 0] = [-1 \ 0; 0 \ -1]$. Geometricamente: **compor duas rotações de 90° dá uma rotação de 180°**, cuja matriz é precisamente $[-1 \ 0; 0 \ -1]$. Confirma-se a regra geral: os ângulos de rotação **somam-se** numa composição ($90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$).

4. $S: [1; 1] = [2 \times 1; 3 \times 1] = [2; 3] \rightarrow (2, 3)$. $S: [1; 0] = [2 \times 1; 3 \times 0] = [2; 0] \rightarrow (2, 0)$. O efeito é uma **variação de tamanho** não uniforme: as abcissas são multiplicadas por 2 e as ordenadas por 3, pelo que a figura é esticada de forma diferente segundo Ox e Oy . O ponto $(1, 0)$ desloca-se na horizontal (a sua ordenada é 0 e mantém-se 0), enquanto $(1, 1)$ se desloca em ambas as direções.

5. $C: [1; 1] = [1 \times 1 + 1 \times 1; 0 \times 1 + 1 \times 1] = [2; 1] \rightarrow (2, 1)$. $C: [0; 1] = [1 \times 0 + 1 \times 1; 0 \times 0 + 1 \times 1] = [1; 1] \rightarrow (1, 1)$. Ficam fixos os pontos com **ordenada nula**, isto é, todos os pontos do **eixo Ox**: para $y = 0$ tem-se $(x, 0) \rightarrow (x + 1 \times 0, 0) = (x, 0)$. O ponto $(0, 1)$ não é fixo (passa a $(1, 1)$); o que o cisalhamento horizontal preserva é a **altura** de cada ponto, não as suas coordenadas.

6. $[1 \ 0; 1 \ 1] \cdot [1; 1] = [1 \times 1 + 0 \times 1; 1 \times 1 + 1 \times 1] = [1; 2] \rightarrow (1, 2)$. Comparando com a questão anterior, o cisalhamento horizontal dava $(2, 1)$ e o vertical dá $(1, 2)$: em ambos os casos um dos deslocamentos é preservado e o outro é alterado, mas **em eixos trocados**. O cisalhamento vertical desloca os pontos na vertical numa quantidade proporcional à abcissa, deixando fixos os pontos do eixo Oy .

7. $[-1 \ 0; 0 \ 1] \cdot [2; 3] = [-1 \times 2 + 0 \times 3; 0 \times 2 + 1 \times 3] = [-2; 3] \rightarrow (-2, 3)$. A transformação **troca o sinal da abcissa** e mantém a ordenada: é a **reflexão no eixo Oy** (a «simetria de espelho» em relação ao eixo vertical). O ponto $(2, 3)$ passa a $(-2, 3)$, à mesma altura e à mesma distância do eixo.

8. $P' = P + T = [1; 1] + [3; 2] = [1+3; 1+2] = [4; 3] \rightarrow (4, 3)$. A translação escreve-se como **soma de matrizes coluna**: a cada coordenada soma-se a componente correspondente do vetor de translação. Não é um produto por matriz, mas sim uma adição — o que corresponde ao deslocamento rígido do ponto.

9. Com $\theta = 60^\circ$: $\cos 60^\circ = 1/2$ e $\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$. Então $[1/2 \ -\sqrt{3}/2; \sqrt{3}/2 \ 1/2] \cdot [1; 0] = [1/2 \times 1 + (-\sqrt{3}/2) \times 0; \sqrt{3}/2 \times 1 + 1/2 \times 0] = [1/2; \sqrt{3}/2] \rightarrow (0,5; \sqrt{3}/2)$. Numericamente, $\sqrt{3}/2 \approx 0,866$, logo o ponto imagem é aproximadamente $(0,500; 0,866)$. O resultado faz sentido: rodar 60° o ponto $(1, 0)$ tem de dar um ponto sobre a circunferência de raio 1, com abcissa $\cos 60^\circ = 0,5$ e ordenada $\sin 60^\circ \approx 0,866$.

10. $R \cdot S = [0 \ -1; 1 \ 0] \cdot [2 \ 0; 0 \ 3] = [0 \times 2 + (-1) \times 0, 0 \times 0 + (-1) \times 3; 1 \times 2 + 0 \times 0, 1 \times 0 + 0 \times 3] = [0 \ -3; 2 \ 0]$. Aplicada a $(1, 0)$: $[0 \ -3; 2 \ 0] \cdot [1; 0] = [0; 2] \rightarrow (0, 2)$. Interpretação da ordem: o produto $R \cdot S$ aplica **primeiro S e depois R**. Verificação: $S: (1, 0) = (2, 0)$; depois $R: (2, 0) = (0, 2) \checkmark$. O resultado coincide com o da aplicação composta — confirma que **a última transformação a ser aplicada é a que está mais à esquerda** no produto.

11. A matriz é $C = [1 \ 1; 0 \ 1]$ (cisalhamento horizontal com $c = 1$). Para um ponto genérico (x, y) tem-se $C: [x; y] = [x + y; y]$, que só coincide com o ponto inicial quando $y = 0$. Ou seja, **C fixa exatamente os pontos do eixo Ox**: o deslocamento horizontal introduzido é $1 \times y$, que se anula precisamente quando $y = 0$. O ponto $(0, 1)$ desloca-se para $(1, 1)$ porque a sua ordenada não é nula, ainda que a sua abcissa seja 0.

12. Uma translação não pode ser representada por uma matriz 2×2 porque **qualquer transformação definida por multiplicação por uma matriz 2×2 deixa fixa a origem**: $M: [0; 0] = [0; 0]$ para qualquer M . Ora uma translação de vetor não nulo (t_1, t_2) desloca a origem para $(t_1, t_2) \neq (0, 0)$, pelo que não pode ser obtida por um produto. Geometricamente, as transformações matriciais (rotações, variações de tamanho, cisalhamentos e reflexões) são **lineares** — preservam a origem e combinam-se por multiplicação — enquanto a translação é **afim**: desloca todos os pontos de forma rígida, o que exige uma **adição** de matrizes coluna. É esta diferença estrutural que obriga a tratar as translações separadamente (ou recorrer a coordenadas homogêneas, com matrizes 3×3 , para as exprimir também por produto).

Nota: identifica sempre a transformação pela **matriz** — é a matriz que determina o efeito. E não confundas os dois pontos fixos: um cisalhamento horizontal mantém a **ordenada** de cada ponto, mas só deixa **fixos** (imóveis) os pontos do eixo Ox .