

Teste de Matemática — Matrizes (12.º Ano)

10 questões 20 valores 3 páginas

Instruções: responde a todas as questões, apresentando os cálculos e as justificações. Cada questão vale 2 valores. As soluções encontram-se na página 3.

Grupo I — Conceito e operações

1. (2 valores) Considera $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$. Calcula $A + B$ e $3A$.

2. (2 valores) Com as matrizes da questão anterior, calcula $A \cdot B$ e $B \cdot A$ e comenta os resultados obtidos.

3. (2 valores) Considera A uma matriz de ordem 3×2 e B uma matriz de ordem 2×4 . Indica, justificando com a regra das dimensões, se os produtos $A \cdot B$ e $B \cdot A$ são possíveis e, em caso afirmativo, qual a ordem do resultado.

4. (2 valores) Determina x e y de modo que se verifique a igualdade $\begin{bmatrix} x + 1 & 3 \\ 2 & y - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Grupo II — Transformações geométricas

5. (2 valores) Aplica a matriz de rotação de 90° , $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, ao ponto $(2, 3)$ e descreve o efeito geométrico.

6. (2 valores) Aplica a matriz $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ao ponto $(1, 1)$ e indica que transformação geométrica está representada.

7. (2 valores) Determina as coordenadas do ponto obtido a partir de $(1, 1)$ por translação de vetor $(3, 2)$, escrevendo a operação em termos de matrizes coluna. Explica por que razão se recorre a uma soma e não a um produto.

Grupo III — Aplicações

8. (2 valores) Escreve a matriz de adjacência de um grafo com os vértices 1, 2 e 3, em que as arestas são 1–2, 1–3 e 2–3, e indica duas propriedades dessa matriz.

9. (2 valores) Calcula o quadrado da matriz obtida na questão 8 e interpreta o significado do elemento de posição $(1, 1)$, identificando os caminhos correspondentes.

10. (2 valores) Escreve o sistema $2x + y = 5$ e $x - y = 1$ na forma matricial, resolve-o pelo método de Gauss e verifica a solução.

Soluções — Teste de Matrizes (12.º Ano)

1. $A + B = [1+5 \ 2+6; 3+7 \ 4+8] = [6 \ 8; 10 \ 12]$; $3A = [3 \times 1 \ 3 \times 2; 3 \times 3 \ 3 \times 4] = [3 \ 6; 9 \ 12]$. A adição efetua-se elemento a elemento (as matrizes têm a mesma ordem); o produto por um escalar multiplica **todos** os elementos.

2. $A \cdot B = [1 \times 5 + 2 \times 7 \ 1 \times 6 + 2 \times 8; 3 \times 5 + 4 \times 7 \ 3 \times 6 + 4 \times 8] = [19 \ 22; 43 \ 50]$. $B \cdot A = [5 \times 1 + 6 \times 3 \ 5 \times 2 + 6 \times 4; 7 \times 1 + 8 \times 3 \ 7 \times 2 + 8 \times 4] = [23 \ 34; 31 \ 46]$. Os resultados são **diferentes**: fica ilustrada a **não comutatividade** do produto de matrizes — em geral $A \cdot B \neq B \cdot A$, ao contrário do que sucede com a adição e com o produto de números reais.

3. $A \cdot B$: o número de colunas de A é 2 e o número de linhas de B é 2 — **coincidem**, pelo que o produto é **possível** e tem ordem 3×4 (dimensões exteriores). $B \cdot A$: o número de colunas de B é 4 e o número de linhas de A é 3 — **não coincidem**, pelo que este produto é **impossível**. É um exemplo de que a ordem dos fatores não é indiferente.

4. Para que duas matrizes sejam iguais, têm de ter a mesma ordem e todos os elementos correspondentes iguais: $x + 1 = 4$, donde **$x = 3$** ; $y - 1 = 5$, donde **$y = 6$** . Os restantes elementos já coincidem.

5. $[0 \ -1; 1 \ 0] \cdot [2; 3] = [0 \times 2 + (-1) \times 3; 1 \times 2 + 0 \times 3] = [-3; 2] \rightarrow (-3, 2)$. O ponto roda um **quarto de volta** em torno da origem, no sentido anti-horário: passa do 1.º para o 2.º quadrante, mantendo-se à mesma distância da origem.

6. $[2 \ 0; 0 \ 3] \cdot [1; 1] = [2 \times 1; 3 \times 1] = [2; 3] \rightarrow (2, 3)$. Trata-se de uma **variação de tamanho** (não uniforme): as abcissas são multiplicadas por 2 e as ordenadas por 3, pelo que a figura é esticada de forma diferente segundo cada eixo.

7. $P' = P + T = [1; 1] + [3; 2] = [1+3; 1+2] = [4; 3] \rightarrow (4, 3)$. Recorre-se a uma **soma** porque a translação **não** pode ser obtida por multiplicação por uma matriz 2×2 : qualquer matriz 2×2 deixa fixa a origem, $M \cdot (0, 0) = (0, 0)$, enquanto uma translação de vetor não nulo desloca a origem. As transformações representáveis por produto são **lineares** (preservam a origem); a translação é **afim** e exige a adição de matrizes coluna.

8. A matriz de adjacência é **$[0 \ 1 \ 1; 1 \ 0 \ 1; 1 \ 1 \ 0]$** . Duas propriedades: é **simétrica** ($a_{ij} = a_{ji}$ — o grafo não é orientado) e tem a **diagonal principal toda nula** (nenhum vértice se liga a si próprio).

9. O quadrado é $[0 \ 1 \ 1; 1 \ 0 \ 1; 1 \ 1 \ 0] \cdot [0 \ 1 \ 1; 1 \ 0 \ 1; 1 \ 1 \ 0] = [2 \ 1 \ 1; 1 \ 2 \ 1; 1 \ 1 \ 2]$. O elemento de posição $(1, 1)$ é **2**: existem **2 caminhos de comprimento 2** que partem do vértice 1 e regressam a ele — **1-2-1** e **1-3-1**. De um modo geral, o elemento (i, j) de A^2 dá o número de caminhos de comprimento 2 entre os vértices i e j .

10. Na forma matricial: $M \cdot V = W$ com $M = [2 \ 1; 1 \ -1]$, $V = [x; y]$ e $W = [5; 1]$. Aplicando o método de Gauss à matriz ampliada e trocando as linhas: $[1 \ -1 \ | \ 1; 2 \ 1 \ | \ 5]$; subtraindo à linha 2 o dobro da linha 1 obtém-se $[1 \ -1 \ | \ 1; 0 \ 3 \ | \ 3]$, donde $3y = 3$ e **$y = 1$** ; substituindo na primeira equação, $x - 1 = 1$ e **$x = 2$** . Solução: $(x, y) = (2, 1)$. Verificação: $2 \times 2 + 1 = 5 \checkmark$ e $2 - 1 = 1 \checkmark$ — ambos os segundos membros confirmados.

Nota: em todos os cálculos com matrizes, verifica primeiro as **dimensões** e depois as **propriedades** aplicáveis. A maior parte dos erros vem de usar intuições dos números reais que não valem para matrizes.