

Resumo — Matrizes

12.º Ano Matemática A 2 páginas

Em síntese: uma matriz é uma **tabela de números reais** dispostos em linhas e colunas. Com ela fazem-se quatro operações, representam-se transformações geométricas do plano e constroem-se modelos para redes, sistemas de equações e populações.

1. Conceito e casos particulares

- Uma matriz de ordem $n \times m$ tem n linhas e m colunas; cada número é um **elemento**, com posição indicada por a_{ij} (primeiro a linha, depois a coluna).
- Casos particulares:** *retangular* ($n \neq m$); *quadrada* ($n = m$); *linha* ($1 \times m$); *coluna* ($n \times 1$); *diagonal* (todos os elementos fora da diagonal principal nulos); *identidade* I (diagonal com 1 e restantes 0); *nula* O (todos os elementos 0).
- Duas matrizes são **iguais** quando têm a mesma ordem e todos os elementos correspondentes iguais.

2. As quatro operações

- Adição e subtração:** exigem a **mesma ordem**; efetuam-se elemento a elemento.
- Produto por um escalar:** multiplica-se **cada** elemento pela constante. A ordem não se altera.
- Produto de matrizes:** $A \cdot B$ só é possível se o **número de colunas de A** igualar o **número de linhas de B**. Se A é $n \times p$ e B é $p \times m$, o produto é $n \times m$.
- Regra linha $\times$ coluna:** $(A \cdot B)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$ — multiplicam-se ordenadamente os elementos da *linha* i de A pelos da *coluna* j de B e somam-se os produtos.

3. Propriedades — o que se mantém e o que se perde

Propriedade	Vale?	Observação
$A + B = B + A$	Sim	comutativa da adição
$(A + B) + C = A + (B + C)$	Sim	associativa da adição
$A + O = A$	Sim	elemento neutro da adição
$A \cdot I = I \cdot A = A$	Sim	elemento neutro da multiplicação
$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$	Sim	associativa da multiplicação
$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$	Sim	distributiva
$A \cdot B = B \cdot A$	Não	o produto não é comutativo
$A \cdot B = O \Rightarrow A = O$ ou $B = O$	Não	existem divisores de zero
$A \cdot B = A \cdot C \Rightarrow B = C$	Não	não se «corta» um fator comum

4. Matrizes e transformações geométricas

- Um ponto $P(x, y)$ representa-se pela matriz coluna $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Multiplicar uma matriz 2×2 por essa coluna dá as coordenadas do **ponto transformado**.
- Rotação** de ângulo θ : $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$. Em particular, 90° : $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; 180° : $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.
- Variação de tamanho:** $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$ multiplica a abcissa por k e a ordenada por m .
- Cisalhamento horizontal:** $\begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (mantém a ordenada, fixa o eixo Ox). **Vertical:** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$ (fixa o eixo Oy).
- Reflexões:** $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ no eixo Oy ; $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ no eixo Ox .
- Translação:** obtém-se por **soma** de matrizes coluna, $P' = P + T$ — **não** por produto, pois qualquer matriz 2×2 deixa fixa a origem.
- Composição:** aplicar primeiro B e depois A corresponde a **$A \cdot B$** — a transformação aplicada em último lugar está mais à esquerda.

5. Aplicações das matrizes

- **Matriz de adjacência de um grafo.** $a_{ij} = 1$ se os vértices i e j estiverem ligados, 0 caso contrário. É **simétrica** (grafo não orientado) e tem diagonal principal nula.
- **Caminhos.** O elemento (i, j) de A^k dá o número de caminhos de comprimento k entre os vértices i e j .
- **Sistemas lineares.** Um sistema escreve-se $M \cdot V = W$ (matriz dos coeficientes, coluna das incógnitas, coluna dos segundos membros) e resolve-se pelo **método de Gauss**, operando sobre as linhas até triangularizar.
- **Modelos populacionais.** $x_{n+1} = M \cdot x_n$, com M a matriz de transição. Para o **total se conservar** as **colunas** de M devem somar 1 (estado escrito como matriz coluna).
- **Equilíbrio.** O estado estável x^* satisfaz $M \cdot x^* = x^*$ — é um **ponto fixo** da transformação.

6. Erros frequentes

- Multiplicar matrizes com **dimensões incompatíveis** — verifica sempre «colunas de A = linhas de B » antes de multiplicar.
- Supor que $A \cdot B = B \cdot A$; o produto de matrizes não é comutativo.
- Concluir $A = O$ ou $B = O$ a partir de $A \cdot B = O$ — há divisores de zero.
- «Cortar» um fator comum numa igualdade matricial (de $A \cdot B = A \cdot C$ não se conclui $B = C$).
- Confundir a **ordem da linha com a da coluna** na notação a_{ij} .
- Tentar representar uma **translação** por uma matriz 2×2 .
- Nos modelos populacionais, trocar a convenção: se o estado é matriz coluna e o modelo é $x_{n+1} = M \cdot x_n$, são as **colunas** que somam 1 — e não as linhas.

7. Síntese

As matrizes são um **modelo unificador**: a mesma estrutura e as mesmas operações servem para descrever redes e contar caminhos, para resolver sistemas de equações lineares, para transformar geometricamente o plano e para modelar a evolução de populações. Dominar as **regras de compatibilidade** e as **propriedades que se mantêm e as que se perdem** em relação aos números reais é o essencial desta matéria.

Atenção: a maior parte dos erros nesta matéria resulta de aplicar aos números reais intuições que **não valem** para matrizes — comutatividade, anulação do produto e possibilidade de «cortar» fatores. Verifica sempre a compatibilidade das dimensões antes de multiplicar.