

Ficha 2 — Operações com matrizes

12.º Ano Matemática A 4 páginas 12 exercícios

Objetivo: efetuar adições, subtrações, produtos por um escalar e **produtos de matrizes**, conhecer as propriedades destas operações e identificar quando um produto **não é possível** e por que razão o produto de matrizes **não é comutativo**.

Revisão rápida — as quatro operações

- **Adição e subtração.** Só se efetuam entre matrizes com a **mesma ordem**, somando (ou subtraindo) os elementos em posições correspondentes.
- **Produto por um escalar.** Multiplica-se **cada** elemento da matriz pela constante k . O resultado tem a mesma ordem da matriz inicial.
- **Produto de matrizes.** $A \cdot B$ só é possível se o **número de colunas de A** for igual ao **número de linhas de B**. Se A tem ordem $n \times p$ e B tem ordem $p \times m$, o produto $A \cdot B$ tem ordem $n \times m$. «As dimensões interiores têm de coincidir; as exteriores dão a ordem do resultado.»
- **Regra linha $\times$ coluna.** O elemento de posição (i, j) do produto obtém-se multiplicando **ordenadamente** os elementos da **linha i** de A pelos da **coluna j** de B e somando os produtos: $(A \cdot B)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$.
- **Propriedades.** $A + B = B + A$ (comutativa a adição); $(A + B) + C = A + (B + C)$; $A + O = A$ (O é a matriz nula); $A \cdot I = I \cdot A = A$; $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (associativa); $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (distributiva).
- **Atenção — o produto NÃO é comutativo.** Em geral $A \cdot B \neq B \cdot A$. Mesmo quando ambos existem, as duas matrizes podem ser diferentes; e há casos em que um dos produtos existe e o outro não.
- **Atenção — o zero não anula.** De $A \cdot B = O$ não se conclui que $A = O$ ou $B = O$. Esta é uma diferença essencial em relação aos números reais.

Exercícios

1. Considera $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$. Determina $A + B$ e $A - B$.

2. Com as matrizes da questão 1, determina $3A$ e $-2B$.

3. Determina o produto $A \cdot B$, indicando explicitamente o cálculo de um dos elementos pela regra linha $\times$ coluna.

4. Determina $B \cdot A$ com as matrizes da questão 1 e compara com $A \cdot B$. Que propriedade da multiplicação de matrizes fica assim ilustrada?

5. Considera $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2; & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (ordem 2×3). Explica por que razão o produto $A \cdot C$ é possível e o produto $C \cdot A$ não é, e calcula $A \cdot C$.

6. Considera $D = \begin{bmatrix} -1 & 2; & 3 & 0 \end{bmatrix}$. Mostra que $(A + B) + D = A + (B + D)$. Que propriedade está em causa?

7. Sendo $I = \begin{bmatrix} 1 & 0; & 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcula $A \cdot I$ e $I \cdot A$ e comenta o resultado.

8. Verifica a propriedade distributiva $A \cdot (B + I) = A \cdot B + A \cdot I$, com as matrizes anteriores.

9. Indica, justificando com a regra das dimensões, quais dos produtos seguintes são possíveis e qual seria a ordem do resultado: (a) $A(2 \times 2) \cdot B(2 \times 4)$; (b) $A(2 \times 2) \cdot B(3 \times 2)$; (c) $A(4 \times 1) \cdot B(1 \times 3)$.

10. Escreve o sistema $2x + y = 5$ e $x - y = 1$ na forma matricial $M \cdot V = W$, indicando M , V e W . Verifica depois que $V = [2; 1]$ satisfaz a equação matricial.

11. Calcula o produto da matriz linha $[1 \ 2]$ pela matriz coluna $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. Indica a ordem do resultado e explica o que representa o valor obtido.

12. Justificação: explica por que razão o produto de matrizes não é comutativo, indicando também porque não se pode concluir $A = O$ ou $B = O$ a partir de $A \cdot B = O$.

Soluções — Operações com matrizes

1. $A + B = [1+5 \ 2+6; 3+7 \ 4+8] = [6 \ 8; 10 \ 12]$. $A - B = [1-5 \ 2-6; 3-7 \ 4-8] = [-4 \ -4; -4 \ -4]$. Ambas as operações são possíveis porque A e B têm a mesma ordem (2×2), e efetuam-se elemento a elemento.

2. $3A = [3 \times 1 \ 3 \times 2; 3 \times 3 \ 3 \times 4] = [3 \ 6; 9 \ 12]$ e $-2B = [-2 \times 5 \ -2 \times 6; -2 \times 7 \ -2 \times 8] = [-10 \ -12; -14 \ -16]$. O fator multiplica **todos** os elementos, não apenas a diagonal principal.

3. Como ambas são 2×2 , o produto é possível e tem ordem 2×2 . Pela regra linha $\times$ coluna: $(1,1) = 1 \times 5 + 2 \times 7 = 5 + 14 = 19$; $(1,2) = 1 \times 6 + 2 \times 8 = 6 + 16 = 22$; $(2,1) = 3 \times 5 + 4 \times 7 = 15 + 28 = 43$; $(2,2) = 3 \times 6 + 4 \times 8 = 18 + 32 = 50$. Logo $A \cdot B = [19 \ 22; 43 \ 50]$.

4. $B \cdot A = [5 \times 1 + 6 \times 3 \ 5 \times 2 + 6 \times 4; 7 \times 1 + 8 \times 3 \ 7 \times 2 + 8 \times 4] = [5 + 18 \ 10 + 24; 7 + 24 \ 14 + 32] = [23 \ 34; 31 \ 46]$. Comparando: $A \cdot B = [19 \ 22; 43 \ 50]$ e $B \cdot A = [23 \ 34; 31 \ 46]$ — são matrizes **diferentes**. Fica assim ilustrada a **não comutatividade** do produto de matrizes: em geral $A \cdot B \neq B \cdot A$, ao contrário do que acontece com a adição e com a multiplicação de números reais.

5. A tem ordem 2×2 e C tem ordem 2×3 . Para $A \cdot C$ é preciso que as colunas de A (2) coincidam com as linhas de C (2) — coincide $\checkmark$, e o resultado tem ordem 2×3 (dimensões exteriores). Para $C \cdot A$ seria preciso que as colunas de C (3) coincidisse com as linhas de A (2) — **não coincide**, pelo que o produto é impossível. Cálculo de $A \cdot C$: linha 1 de A = (1, 2) — com as colunas de C: $1 \times 1 + 2 \times 3 = 7$; $1 \times 0 + 2 \times 1 = 2$; $1 \times 2 + 2 \times 0 = 2$. Linha 2 de A = (3, 4): $3 \times 1 + 4 \times 3 = 15$; $3 \times 0 + 4 \times 1 = 4$; $3 \times 2 + 4 \times 0 = 6$. Logo $A \cdot C = [7 \ 2 \ 2; 15 \ 4 \ 6]$.

6. $A + B = [6 \ 8; 10 \ 12]$, logo $(A + B) + D = [6-1 \ 8+2; 10+3 \ 12+0] = [5 \ 10; 13 \ 12]$. Por outro lado $B + D = [5-1 \ 6+2; 7+3 \ 8+0] = [4 \ 8; 10 \ 8]$, e $A + (B + D) = [1+4 \ 2+8; 3+10 \ 4+8] = [5 \ 10; 13 \ 12]$. Os dois resultados **coincidem**: está em causa a propriedade **associativa** da adição de matrizes, $(A + B) + D = A + (B + D)$.

7. $A \cdot I = [1 \times 1 + 2 \times 0 \ 1 \times 0 + 2 \times 1; 3 \times 1 + 4 \times 0 \ 3 \times 0 + 4 \times 1] = [1 \ 2; 3 \ 4] = A$. Igualmente $I \cdot A = [1 \times 1 + 0 \times 3 \ 1 \times 2 + 0 \times 4; 0 \times 1 + 1 \times 3 \ 0 \times 2 + 1 \times 4] = [1 \ 2; 3 \ 4] = A$. Conclui-se que a matriz identidade desempenha, no produto de matrizes, o mesmo papel que o número 1 na multiplicação de números reais: multiplicar por I não altera a matriz — e, além disso, aqui o produto é comutativo, o que só acontece em casos especiais.

8. $B + I = [5+1 \ 6+0; 7+0 \ 8+1] = [6 \ 6; 7 \ 9]$. Então $A \cdot (B + I) = [1 \times 6 + 2 \times 7 \ 1 \times 6 + 2 \times 9; 3 \times 6 + 4 \times 7 \ 3 \times 6 + 4 \times 9] = [6+14 \ 6+18; 18+28 \ 18+36] = [20 \ 24; 46 \ 54]$. Por outro lado, $A \cdot B + A \cdot I = [19 \ 22; 43 \ 50] + [1 \ 2; 3 \ 4] = [20 \ 24; 46 \ 54]$. Os resultados coincidem, confirmando a propriedade **distributiva** à esquerda: $A \cdot (B + I) = A \cdot B + A \cdot I$.

9. (a) $A(2 \times 2) \cdot B(2 \times 4)$: colunas de A = 2, linhas de B = 2 $\checkmark$ — **possível**, com ordem 2×4 . (b) $A(2 \times 2) \cdot B(3 \times 2)$: colunas de A = 2, linhas de B = 3 $\times$ — **impossível**. (c) $A(4 \times 1) \cdot B(1 \times 3)$: colunas de A = 1, linhas de B = 1 $\checkmark$ — **possível**, com ordem 4×3 . As «dimensões interiores» (2 e 2, 1 e 1) coincidem nos casos possíveis e são as «exteriores» (2 e 4, 4 e 3) que dão a ordem do resultado.

10. O sistema escreve-se $M \cdot V = W$ com $M = [2 \ 1; 1 \ -1]$, $V = [x; y]$ e $W = [5; 1]$. Verificação com $V = [2; 1]$: $M \cdot V = [2 \times 2 + 1 \times 1; 1 \times 2 + (-1) \times 1] = [4+1; 2-1] = [5; 1] = W \checkmark$ — logo $x = 2$ e $y = 1$ é a solução. Este é o fundamento do **método de Gauss**: resolver o sistema passa a ser operar sobre as linhas da matriz.

11. $[1 \ 2] \cdot [3; 4] = 1 \times 3 + 2 \times 4 = 3 + 8 = [11]$. A matriz linha tem ordem 1×2 e a matriz coluna 2×1 : o produto é possível e tem ordem 1×1 — uma matriz com um só elemento, que se identifica com o número 11. O valor obtido é precisamente o **produto interno** dos vetores (1, 2) e (3, 4): o produto de matrizes generaliza esta operação.

12. O produto de matrizes não é comutativo porque a **regra linha $\times$ coluna não é simétrica**: em $A \cdot B$ cada elemento combina *linhas de A* com *colunas de B*, enquanto em $B \cdot A$ se combinam *linhas de B* com *colunas de A* — emparelhamentos diferentes dos mesmos números, que dão em geral resultados diferentes (como se viu na questão 4: $[19 \ 22; 43 \ 50]$ contra $[23 \ 34; 31 \ 46]$). Acresce que os dois produtos podem nem ter a mesma ordem, e há casos em que um é possível e o outro não (questão 5). Quanto a $A \cdot B = O$, não se pode concluir $A = O$ nem $B = O$: por exemplo, $[1 \ 1; 1 \ 1] \cdot [1 \ 1; -1 \ -1] = [0 \ 0; 0 \ 0]$, com nenhuma das matrizes a ser a matriz nula. Há, ao contrário dos números reais, **divisores de zero** — e é por isso que a simplificação «cortar» um fator comum numa igualdade matricial não é legítima.

Nota: antes de multiplicar matrizes, verifica sempre a **compatibilidade das dimensões**. A maior parte dos erros nesta matéria é tentar multiplicar matrizes incompatíveis ou trocar a ordem dos fatores.