

Ficha 1 — Conceito de matriz e casos particulares

12.º Ano Matemática A 4 páginas 12 exercícios

Objetivo: reconhecer uma **matriz** como tabela de números reais, identificar a sua ordem e os seus elementos pela posição, e distinguir os casos particulares (retangular, quadrada, linha, coluna, diagonal e identidade).

Revisão rápida — matrizes e notação

- Matriz.** Uma tabela de números reais dispostos em **linhas** e **colunas**. Escreve-se entre parênteses retos: $A = [a_{ij}]$.
- Ordem (dimensão).** Uma matriz com n linhas e m colunas tem ordem $n \times m$ (lê-se « n por m »). O primeiro número é sempre o **número de linhas**.
- Elemento a_{ij} .** É o elemento que está na **linha i** e na **coluna j** — primeiro o índice da linha, depois o da coluna (indica-se sempre «linha, coluna»).
- Casos particulares:**
 - Retangular** — $n \neq m$.
 - Quadrada** — $n = m$ (diz-se de ordem n).
 - Matriz linha** — tem uma só linha ($1 \times m$).
 - Matriz coluna** — tem uma só coluna ($n \times 1$).
 - Diagonal** — quadrada e todos os elementos fora da diagonal principal são nulos.
 - Identidade** — diagonal com **todos** os elementos da diagonal principal iguais a 1 (nota-se por I).
- Diagonal principal.** Conjunto dos elementos a_{ii} , isto é, os que têm o mesmo índice de linha e de coluna ($a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots$).
- Igualdade.** Duas matrizes são iguais se tiverem a mesma ordem e se todos os elementos em posições correspondentes forem iguais — o que permite determinar incógnitas.

Exercícios

1. Numa turma registaram-se as notas de três alunos a duas disciplinas, obtendo-se a tabela seguinte. Escreve-a na forma de matriz e indica a sua ordem.

	Mat.	Fís.
Ana	15	12
Bruno	11	14
Carla	18	9

2. Indica a ordem de cada matriz: (a) uma matriz com 4 linhas e 3 colunas; (b) uma matriz com 2 linhas e 5 colunas; (c) uma matriz quadrada com 3 linhas.

3. Considera $A = [1 \ 2 \ 3; 4 \ 5 \ 6]$ (duas linhas e três colunas). Indica o valor dos elementos a_{11} , a_{13} , a_{21} e a_{23} .

4. Classifica cada matriz como retangular, quadrada, linha, coluna, diagonal ou identidade: (a) $\begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$ · (b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ · (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ · (d) $\begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ · (e) $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ · (f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

5. Escreve a matriz identidade de ordem 2 e a matriz identidade de ordem 3, e explica o que as distingue de uma matriz diagonal qualquer.

6. Determina x e y de modo que se verifique a igualdade $\begin{bmatrix} x & 3 \\ 5 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$.

7. Constrói a matriz A de ordem 3×2 definida por $a_{ij} = i + j$.

8. Constrói a matriz B de ordem 2×3 definida por $b_{ij} = 2i - j$.

9. Escreve uma matriz diagonal de ordem 3 cujos elementos da diagonal principal sejam 4, -1 e 6, e indica quantos elementos nulos tem.

10. Uma matriz C de ordem 4×4 é diagonal e tem todos os elementos da diagonal principal iguais a 3. Escreve C e diz se é a matriz identidade, justificando.

11. Uma matriz pode ser simultaneamente matriz linha e matriz coluna? E matriz quadrada e matriz retangular? Justifica com exemplos.

12. Justificação: explica por que razão a ordem de uma matriz é uma informação indispensável e por que motivo a indicação «linha, coluna» da notação a_{ij} não pode ser invertida.

Soluções — Conceito de matriz e casos particulares

1. A matriz é $\begin{bmatrix} 15 & 12; 11 & 14; 18 & 9 \end{bmatrix}$ — três linhas (uma por aluno) e duas colunas (uma por disciplina), logo tem ordem 3×2 . A escolha de pôr os alunos em linhas e as disciplinas em colunas é uma convenção: o importante é que a ordem indique claramente o que representa cada linha e cada coluna.

2. (a) 4×3 (quatro linhas, três colunas). (b) 2×5 . (c) Sendo quadrada com 3 linhas, tem também 3 colunas: ordem 3×3 .

3. Na matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3; 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$: $a_{11} = 1$ (linha 1, coluna 1); $a_{13} = 3$ (linha 1, coluna 3); $a_{21} = 4$ (linha 2, coluna 1); $a_{23} = 6$ (linha 2, coluna 3).

4. (a) $\begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$ é **quadrada** de ordem 1 (e, simultaneamente, matriz linha e matriz coluna). (b) $\begin{bmatrix} 2 & 0; 0 & 5 \end{bmatrix}$ é **diagonal** de ordem 2 (quadrada com zeros fora da diagonal principal). (c) é a **matriz identidade** de ordem 3. (d) $\begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ é **matriz linha** (1×3). (e) $\begin{bmatrix} 4; 0; 2 \end{bmatrix}$ é **matriz coluna** (3×1). (f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3; 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ é **retangular** (2×3 , com $n \neq m$).

5. Identidade de ordem 2: $\begin{bmatrix} 1 & 0; 0 & 1 \end{bmatrix}$. Identidade de ordem 3: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0; 0 & 1 & 0; 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Distinguem-se de uma matriz diagonal qualquer porque, além de terem zeros fora da diagonal principal, têm **todos** os elementos da diagonal principal iguais a 1 — numa matriz diagonal geral esses elementos podem ser quaisquer números reais (por exemplo 4, -1 e 6). A identidade é, portanto, um caso particular das matrizes diagonais.

6. Para que as matrizes sejam iguais, os elementos em posições correspondentes têm de coincidir: comparando a posição (1,1) obtém-se $x = 7$, e comparando a posição (2,2) obtém-se $y = -2$. Logo $x = 7$ e $y = -2$. (As restantes posições — o 3 e o 5 — já coincidem, pelo que não impõem condições.)

7. A matriz tem 3 linhas e 2 colunas. Com $a_{ij} = i + j$: $a_{11} = 1 + 1 = 2$; $a_{12} = 1 + 2 = 3$; $a_{21} = 2 + 1 = 3$; $a_{22} = 2 + 2 = 4$; $a_{31} = 3 + 1 = 4$; $a_{32} = 3 + 2 = 5$. Logo $A = \begin{bmatrix} 2 & 3; 3 & 4; 4 & 5 \end{bmatrix}$. Note-se que a matriz não é quadrada e que $a_{12} = a_{21} = 3$: a igualdade de elementos em posições diferentes é possível e não tem qualquer significado especial.

8. A matriz tem 2 linhas e 3 colunas. Com $b_{ij} = 2i - j$: linha 1: $b_{11} = 2 - 1 = 1$; $b_{12} = 2 - 2 = 0$; $b_{13} = 2 - 3 = -1$. Linha 2: $b_{21} = 4 - 1 = 3$; $b_{22} = 4 - 2 = 2$; $b_{23} = 4 - 3 = 1$. Logo $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1; 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Repare-se que o elemento b_{12} é 0 sem que a matriz seja diagonal — os zeros de uma matriz diagonal estão fora da diagonal principal, o que não é o caso aqui.

9. A matriz é $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0; 0 & -1 & 0; 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$. É de ordem 3×3 , logo tem **9 elementos**, dos quais **3** pertencem à diagonal principal (4, -1 e 6) e os restantes **6 são nulos** — precisamente os que estão fora da diagonal principal, como exige a definição de matriz diagonal.

10. $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0; 0 & 3 & 0 & 0; 0 & 0 & 3 & 0; 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. É uma matriz **diagonal** (zeros fora da diagonal principal), mas **não** é a matriz identidade: na identidade os elementos da diagonal principal têm de ser iguais a 1, e aqui são iguais a 3. (Em notação compacta, $C = 3I$, o que ilustra que a identidade e uma matriz diagonal com valor constante são diferentes.)

11. Sim, é possível ser simultaneamente matriz linha e matriz coluna: basta ter ordem 1×1 , como $\begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$ — tem uma só linha e uma só coluna, satisfazendo ambas as definições. Já **quadrada e retangular** são **mutuamente exclusivas**: uma matriz é quadrada quando $n = m$ e retangular quando $n \neq m$, pelo que nenhuma matriz pode ser as duas coisas. Qualquer matriz com número de linhas diferente do número de colunas é retangular; as restantes são quadradas.

12. A ordem é indispensável porque a mesma lista de números pode originar matrizes diferentes e com propriedades distintas conforme a sua organização em linhas e colunas: os números 1, 2, 3, 4 podem formar a matriz 2×2 $\begin{bmatrix} 1 & 2; 3 & 4 \end{bmatrix}$ ou a matriz 1×4 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, e estas não são a mesma matriz — por exemplo, só a primeira pode ser multiplicada por outra matriz 2×2 . Além disso, é a ordem que determina se a matriz é quadrada, se admite certas operações e quantos elementos tem ($n \times m$). Quanto à notação a_{ij} , a ordem «linha, coluna» não pode ser invertida porque as linhas e as colunas são estruturas diferentes: se a convenção fosse invertida, a_{13} designaria o elemento da coluna 1 e da linha 3 — uma posição que pode nem existir (por exemplo, numa matriz com apenas 2 linhas) e que, quando existe, é em geral um número diferente. Usar a convenção «linha, coluna» de forma consistente é o que garante que todos leiam a mesma posição.

Nota: escreve sempre a ordem como **linhas $\times$ colunas** — é a convenção universal e o primeiro erro a evitar nesta matéria.