

Ficha 4 — Aplicações das matrizes

12.º Ano Matemática A 4 páginas 12 exercícios

Objetivo: aplicar as matrizes a três contextos concretos — a **matriz de adjacência** de um grafo, a resolução de **sistemas de equações lineares** (método de Gauss) e os **modelos populacionais** com matrizes de transição.

Revisão rápida — três aplicações

- Matriz de adjacência.** Num grafo com n vértices, a matriz de adjacência A é quadrada de ordem n , com $a_{ij} = 1$ se os vértices i e j estiverem ligados por uma aresta e $a_{ij} = 0$ caso contrário. Em grafos não orientados a matriz é **simétrica** e a diagonal principal é nula (nenhum vértice se liga a si próprio).
- Potências e caminhos.** O elemento de posição (i, j) de A^k dá o **número de caminhos de comprimento k** entre os vértices i e j . Em particular, os elementos da diagonal principal de A^2 contam os caminhos fechados de comprimento 2.
- Sistemas em forma matricial.** Um sistema escreve-se $M \cdot V = W$, com M a matriz dos coeficientes, V a matriz coluna das incógnitas e W a matriz coluna dos segundos membros. Esta forma é o ponto de partida do **método de Gauss**, que opera sobre as linhas da matriz para triangularizar o sistema.
- Modelos populacionais.** Se um grupo se reparte em duas categorias, escreve-se $x_{n+1} = M \cdot x_n$: a matriz M descreve como se passa de um estado ao seguinte. Para que o **total se conserve**, as **colunas** de M têm de somar 1 (matriz coluna-estocástica) quando o produto é aplicado como $M \cdot x_n$.
- Equilíbrio.** O estado de equilíbrio x^* verifica $M \cdot x^* = x^*$: é um ponto fixo da transformação. Encontra-se resolvendo essa igualdade em conjunto com a condição de conservação do total.
- Valor das matrizes como modelo:** permitem tratar de forma uniforme situações muito diferentes (redes, sistemas lineares, evoluções de populações), reduzindo cada problema a operações matriciais.

Exercícios

1. Considera um grafo com os vértices 1, 2, 3 e 4, e as arestas 1–2, 1–3, 2–3 e 2–4. Escreve a matriz de adjacência A e indica a sua ordem.

2. Interpreta os valores de a_{12} e a_{14} na matriz obtida na questão 1 e explica por que razão a matriz é simétrica e tem a diagonal principal toda nula.

3. Calcula A^2 e interpreta o significado do elemento de posição (2, 2).

4. A partir da matriz A^2 , determina o número de caminhos de comprimento 2 entre os vértices 1 e 2, e identifica quais são.

5. Escreve o sistema $2x + y = 5$ e $x - y = 1$ na forma matricial $M \cdot V = W$ e resolve-o pelo método de Gauss.

6. Resolve, pelo método de Gauss, o sistema: $x + y + z = 6$, $2x - y + z = 3$, $x + 2y - z = 2$.

7. Verifica se a solução encontrada na questão 6 satisfaz as três equações do sistema.

8. Uma população de 1500 aves reparte-se entre duas zonas: 1000 na zona A e 500 na zona B. Sabendo que, de um ano para o outro, 80% das aves da zona A permanecem em A e 20% passam para B, e que 30% das de B passam para A (com os restantes a permanecer em B), escreve a matriz de transição M e determina a distribuição ao fim de um ano.

9. Aplica novamente a matriz M para obter a distribuição ao fim de dois anos e verifica que o total de aves se mantém. Explica por que razão o total se conserva.

10. Determina o estado de equilíbrio do modelo da questão 8, resolvendo $M \cdot x^* = x^*$ com a condição de que o total seja 1500.

11. Explica por que razão, para que o total se conserve quando o modelo é aplicado como $x_{n+1} = M \cdot x_n$, as colunas de M têm de somar 1. Que aconteceria se as linhas somassem 1 em vez das colunas?

Soluções — Aplicações das matrizes

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, matriz quadrada de ordem 4×4 . A linha (e a coluna) i corresponde ao vértice i ; coloca-se 1 quando existe aresta entre o vértice da linha e o da coluna.

2. $a_{12} = 1$: existe a aresta 1-2 (os vértices 1 e 2 estão ligados). $a_{14} = 0$: não existe aresta entre 1 e 4. A matriz é **simétrica** porque o grafo não é orientado: se i está ligado a j , então j está ligado a i , pelo que $a_{ij} = a_{ji}$. A diagonal principal é toda nula ($a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = 0$) porque nenhum vértice está ligado a si próprio — não há arestas de um vértice para ele mesmo.

3. $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. O elemento de posição (2, 2) é 3: existem **3 caminhos de comprimento 2** que partem do vértice 2 e regressam a ele — 2-1-2, 2-3-2 e 2-4-2. São precisamente os três vértices vizinhos de 2, cada um dando origem a um percurso de ida e volta.

4. O elemento de posição (1, 2) de A^2 é 1: existe **um único** caminho de comprimento 2 entre os vértices 1 e 2. Identificando-o: partindo de 1 e percorrendo duas arestas, as possibilidades seriam 1-2-(x) ou 1-3-(x). A segunda dá 1-3-2, que é um caminho válido (existe aresta 3-2) ✓; a primeira conduziria a 1-2-1, 1-2-3 ou 1-2-4 — mas nenhum destes termina em 2. Logo o caminho é **1-3-2**.

5. Na forma matricial: $M \cdot V = W$ com $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $W = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$. Aplicando o método de Gauss à matriz ampliada $\begin{bmatrix} 2 & 1 & | & 5 \\ 1 & -1 & | & 1 \end{bmatrix}$: trocando as linhas para facilitar, $\begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 1 \\ 2 & 1 & | & 5 \end{bmatrix}$, e subtraindo à linha 2 o dobro da linha 1: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 3 & | & 3 \end{bmatrix}$. Desta última obtém-se $3y = 3$, logo $y = 1$; substituindo na primeira, $x - 1 = 1$, logo $x = 2$. Solução: $(x, y) = (2, 1)$.

6. Matriz ampliada do sistema: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 6 \\ 2 & -1 & 1 & | & 3 \\ 1 & 2 & -1 & | & 2 \end{bmatrix}$. Eliminando a primeira incógnita nas linhas 2 e 3 (linha 2 - 2 × linha 1; linha 3 - linha 1): $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 6 \\ 0 & -3 & -1 & | & -9 \\ 0 & 1 & -2 & | & -4 \end{bmatrix}$. Eliminando agora a segunda incógnita na linha 3 (linha 3 + (1/3) × linha 2): $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 6 \\ 0 & -3 & -1 & | & -9 \\ 0 & 0 & -7/3 & | & -7 \end{bmatrix}$. Da última equação: $(-7/3)z = -7$, logo $z = 3$. Substituindo na segunda: $-3y - 3 = -9$, donde $-3y = -6$ e $y = 2$. Substituindo na primeira: $x + 2 + 3 = 6$, donde $x = 1$. Solução: $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

7. Verificação nas três equações originais: $1 + 2 + 3 = 6$ ✓; $2 \times 1 - 2 + 3 = 2 - 2 + 3 = 3$ ✓; $1 + 2 \times 2 - 3 = 1 + 4 - 3 = 2$ ✓. As três igualdades confirmam-se, pelo que a solução (1, 2, 3) está correta.

8. A matriz de transição é $M = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{bmatrix}$: a primeira coluna descreve o destino das aves da zona A (80% ficam em A, 20% vão para B) e a segunda coluna o destino das aves da zona B (30% vão para A, 70% ficam em B). Com $x_0 = [1000; 500]$, ao fim de um ano: $x_1 = M \cdot x_0 = [0,8 \times 1000 + 0,3 \times 500; 0,2 \times 1000 + 0,7 \times 500] = [800 + 150; 200 + 350] = [950; 550]$ — isto é, **950 aves na zona A e 550 na zona B**.

9. $x_2 = M \cdot x_1 = [0,8 \times 950 + 0,3 \times 550; 0,2 \times 950 + 0,7 \times 550] = [760 + 165; 190 + 385] = [925; 575]$. O total é $950 + 550 = 1500$ e $925 + 575 = 1500$ — o total **conserva-se**. Isso acontece porque as **colunas** de M somam 1 ($0,8 + 0,2 = 1$ e $0,3 + 0,7 = 1$): cada coluna representa a repartição **completa** das aves de uma zona pelas duas zonas, pelo que nenhuma ave é criada nem perdida — apenas redistribuída.

10. Procura-se $x^* = [a; b]$ com $M \cdot x^* = x^*$ e $a + b = 1500$. Da primeira equação: $0,8a + 0,3b = a$, donde $0,3b = 0,2a$ e portanto $a = 1,5b$. Substituindo em $a + b = 1500$, $1,5b + b = 1500$, ou seja $2,5b = 1500$, donde $b = 600$ e $a = 900$. O estado de equilíbrio é **[900; 600]** — 900 aves na zona A e 600 na zona B. Verificação: $M \cdot [900; 600] = [0,8 \times 900 + 0,3 \times 600; 0,2 \times 900 + 0,7 \times 600] = [720 + 180; 180 + 420] = [900; 600]$ ✓. A distribuição estável corresponde a 60% das aves na zona A e 40% na zona B.

11. As colunas de M têm de somar 1 porque cada coluna descreve a **repartição completa das unidades que se encontram numa dada categoria**: ao calcular a nova categoria j , o produto $M \cdot x_n$ faz a soma $\sum_i m_{ij} x_i$, ou seja, recolhe de cada categoria i uma fração m_{ij} das suas unidades. Se a coluna j somar 1, todas as unidades que saem das várias categorias são integralmente encaminhadas para as categorias de destino, e somando as equações de todas as categorias o total mantém-se. Se fossem as **linhas** a somar 1, o modelo conservaria o total apenas se fosse aplicado na forma $x_{n+1} = x_n \cdot M$ (produto à direita, com x_n como matriz linha) — a matriz correspondente seria a **transposta** de M . Ou seja, a convenção «colunas somam 1» está ligada à opção de escrever o estado como **matriz coluna**; trocar a convenção sem trocar a forma de multiplicar daria totais errados (por exemplo, $[0,9 \ 0,1; 0,2 \ 0,8]$ aplicada a $[1000; 500]$ daria $[950; 600]$, com total 1550 em vez de 1500).

12. As três aplicações mostram a mesma ideia de fundo: **reduzir situações diferentes a um único tipo de objeto e de operações**. Numa rede, a matriz de adjacência codifica as ligações e as suas potências contam caminhos — um problema combinatório passa a ser um cálculo matricial. Num sistema linear, a forma $M \cdot V = W$ permite trabalhar apenas com a matriz dos coeficientes e os segundos membros, e o método de Gauss resume-se a transformações sobre as linhas — um problema algébrico passa a ser operações matriciais elementares. Numa evolução populacional, a matriz de transição codifica as regras de passagem e a sua iteração dá a evolução do sistema, permitindo ainda identificar o **estado de equilíbrio** como ponto fixo. Em todos os casos, as matrizes funcionam como **modelos**: uma estrutura que se manipula segundo regras próprias e cujo comportamento reflete, em linguagem matemática, o comportamento do sistema real.

Nota: nos modelos populacionais, verifica **sempre** a convenção: a matriz deve ter as **colunas** a somar 1 quando o estado é uma matriz coluna e o modelo é $x_{n+1} = M \cdot x_n$. É o único modo de garantir que o total se conserva.