

Resumo — Limites, continuidade e estudo de funções

12.º Ano

Matemática A

2 páginas

Síntese

Esta síntese reúne os limites, a continuidade e o estudo de funções do 12.º ano: propriedades operatórias dos limites, indeterminações e regra de L'Hôpital, limites notáveis, continuidade num ponto, assíntotas, estudo completo de funções e a garantia de existência de raízes.

1. Limites: propriedades operatórias

- O limite descreve o comportamento de $f(x)$ quando x se aproxima de a (ou de $\pm\infty$). Escreve-se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.
- Propriedades:** o limite da soma é a soma dos limites, o do produto é o produto, e o do quociente é o quociente — desde que os limites existam e o denominador não tenda para zero.
- Para funções contínuas (polinómios, exponenciais, logaritmos, trigonométricas), $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ — basta substituir.
- Em $\pm\infty$, compara-se a **ordem de grandeza**: exponencial > potência > logaritmo. Por isso $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x / x = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x / x = +\infty$.

2. Indeterminações e regra de L'Hôpital

- As formas $0/0$, ∞/∞ , $0 \times \infty$, $+\infty - \infty$ e 1^∞ são **indeterminações**: o limite existe, mas não se obtém por substituição direta.
- Levantar indeterminações:** fatorizar e simplificar — $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4)/(x - 2) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$; ou dividir numerador e denominador pela maior potência — $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + 2x)/(x^2 - 1) = 3$.
- Regra de L'Hôpital** (só nas formas $0/0$ e ∞/∞): $\lim f/g = \lim f'/g'$, se este último existir. Exemplos: $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)/x = \lim_{x \rightarrow 0} e^x/1 = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)/x = \lim_{x \rightarrow 0} 1/(1+x) = 1$.
- Não é uma regra universal:** a regra só se aplica quando o quociente é uma indeterminação das formas indicadas. Aplicá-la a uma forma determinada é erro.

3. Limites notáveis

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x / x = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \tan x / x = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)/x = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)/x = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 1/x)^x = e$ — é esta a origem do número de Euler.
- Consequências em $\pm\infty$: $\ln x$ cresce mais devagar do que qualquer potência ($\lim \ln x / x = 0$); a exponencial cresce mais depressa do que qualquer potência ($\lim e^x / x^n = +\infty$).

4. Continuidade

- f é **contínua em a** se e só se se verificam **três condições**: (i) a pertence ao domínio, isto é $f(a)$ existe; (ii) existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$; (iii) esse limite é **igual** a $f(a)$.
- Tipos de descontinuidade:** se (i) falha, o ponto não pertence ao domínio (por exemplo $f(x) = 1/(x - 2)$ em $x = 2$); se (ii) ou (iii) falham, há um «salto» ou um ponto em que o limite não coincide com o valor da função.
- Descontinuidade removível:** quando (ii) se verifica mas (iii) não, e é possível redefinir $f(a)$ para tornar a função contínua. Exemplo: $f(x) = (x^2 - 9)/(x - 3)$ tem $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$, logo define-se $f(3) = 6$ e a função passa a ser contínua.
- As funções elementares são contínuas no seu domínio; somas, produtos, quocientes e compostas de contínuas são contínuas onde estão definidas.

5. Assíntotas

- Verticais** (retas $x = a$): quando $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty$. O gráfico aproxima-se da reta junto de a .
- Horizontais** (retas $y = b$): quando $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$. Exemplo: $f(x) = (2x + 1)/(x - 3)$ tem $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$, logo $y = 2$ é assíntota horizontal — o gráfico aproxima-se dela sem a atingir (a igualdade $(2x + 1)/(x - 3) = 2$ conduziria a $1 = -6$, impossível).
- Oblíquas** (retas $y = mx + b$, com $m \neq 0$): quando $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)/x$ é finito e não nulo e $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx]$. Exemplo: $f(x) = x + 1/x$ tem $y = x$ como assíntota oblíqua, pois $f(x) - x = 1/x \rightarrow 0$.
- Uma função pode ter duas assíntotas horizontais distintas (diferentes em $-\infty$ e $+\infty$) ou assíntotas verticais em vários pontos.

6. Estudo completo de uma função

- **Ordem dos passos:** (1) domínio; (2) zeros e sinal de f ; (3) f' , monotonia e extremos; (4) f'' , concavidades e pontos de inflexão; (5) comportamento no infinito e assíntotas; (6) esboço do gráfico.
- O domínio vem **sempre primeiro** — tudo o resto só faz sentido dentro dele.
- **Justificação obrigatória:** o anulamento de f' ou de f'' não basta; é o **estudo do sinal** que permite concluir sobre extremos e inflexões.
- **Papel da tecnologia:** a calculadora gráfica **sugere** o aspeto do gráfico e permite verificar resultados, mas a justificação exige o estudo analítico.

7. Existência de raízes e resolução aproximada

- **Teorema dos valores intermédios (Bolzano-Cauchy):** se f é contínua em $[a, b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$, existe pelo menos um $c \in]a, b[$ com $f(c) = 0$. Garante a **existência**, não o valor.
- **Unicidade:** se além disso f for estritamente monótona no intervalo (por exemplo $f' > 0$), a raiz é **única**.
- **Bisseção:** divide-se o intervalo ao meio e conserva-se a metade com mudança de sinal; a largura passa a $(b - a)/2^n$ ao fim de n iterações. Converge sempre, mas devagar.
- **Newton-Raphson:** $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ — geometricamente, a abcissa em que a tangente em x_n corta Ox. Muito mais rápido, mas exige f' e uma boa estimativa inicial.
- Exemplo: para $x^3 + x - 1 = 0$ em $[0, 1]$, a bisseção dá 0,682328 em 20 iterações e o método de Newton chega ao mesmo valor em apenas **4 iterações**.

8. Tabela-resumo

Ideia	Critério	Conclusão
Continuidade em a	$f(a)$ existe, limite existe, são iguais	gráfico «sem saltos» em a
Assíntota vertical	$\lim = \pm\infty$ em $x \rightarrow a$	reta $x = a$
Assíntota horizontal	$\lim = b$ em $x \rightarrow \pm\infty$	reta $y = b$
Assíntota oblíqua	m e b finitos	reta $y = mx + b$
L'Hôpital	só em $0/0$ e ∞/∞	$\lim f/g = \lim f'/g'$
Bolzano-Cauchy	contínua e $f(a) \cdot f(b) < 0$	existe raiz em $]a, b[$

9. Erros frequentes a evitar

- Aplicar a **regra de L'Hôpital** fora das formas indeterminadas $0/0$ e ∞/∞ .
- Concluir que existe assíntota **horizontal** quando o limite é infinito, ou esquecer que a oblíqua exige $m \neq 0$.
- Assumir continuidade onde a função não está definida: a condição (i) falha e não há continuidade.
- Garantir a **unicidade** da raiz apenas com Bolzano-Cauchy (é preciso a monotonia).
- Escrever $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ para funções **não contínuas** em a .
- Confundir o número de iterações com a precisão: na bisseção, cada iteração ganha apenas um dígito binário.

Controlo rápido: $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)/x = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x/x = 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x/x = 0$; $f(x) = (2x + 1)/(x - 3)$ tem assíntota vertical $x = 3$ e horizontal $y = 2$; e para $x^3 + x - 1 = 0$ a bisseção precisa de 20 iterações para 0,682328, contra 4 de Newton-Raphson.