

Ficha 3 — Integral definido e cálculo de áreas

12.º Ano

Matemática A

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: interpretar o integral definido de uma função positiva como a medida da **área** da região entre o gráfico e o eixo Ox, e calcular áreas de figuras definidas por gráficos de funções.

Revisão rápida — integral definido e área

- **Notação.** $\int_a^b f(x) dx$ lê-se «integral de f entre a e b »; a é o **limite inferior** e b o **limite superior**.
- **Interpretação geométrica.** Se f é **contínua e não negativa** em $[a, b]$, então $\int_a^b f(x) dx$ é exatamente a **área** da região limitada pelo gráfico de f , pelo eixo Ox e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$.
- **Área com sinal.** Se f toma valores **negativos**, o integral é **negativo** nessa parte: mede a área «com sinal», contando negativamente as regiões abaixo do eixo Ox. Por isso o integral pode ser 0 sem que a região tenha área nula.
- **Área (geométrica).** Para obter a área em unidades de área, integram-se separadamente os troços onde f mantém o sinal e somam-se os **módulos** dos valores obtidos.
- **Propriedades úteis:** $\int_a^a f = 0$; $\int_a^b f = -\int_b^a f$; $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ (aditividade do intervalo).
- **Área entre dois gráficos.** Se $f(x) \geq g(x)$ em $[a, b]$, a área da região entre os dois gráficos é $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$.
- **Áreas conhecidas como controlo:** a área de um trapézio ou triângulo pode calcular-se pela geometria elementar e serve para confirmar o resultado do integral.

Exercícios

1. Calcula $\int_0^3 2x dx$ e confirma o resultado comparando-o com a área do triângulo de vértices (0, 0), (3, 0) e (3, 6).

2. Calcula $\int_0^1 x^2 dx$ e interpreta o valor obtido como área de uma região.

3. Calcula $\int_0^\pi \sin x dx$ e explica por que razão a área é finita, apesar de o intervalo ter comprimento π .

4. Calcula $\int_1^e (1/x) dx$ e comenta o resultado, atendendo a que se trata de uma área.

5. Calcula $\int_0^2 (x^2 + 1) dx$.

6. Calcula $\int_{-1}^1 x^3 dx$ e explica por que razão o resultado é 0, embora a região entre o gráfico e o eixo Ox não seja vazia. Calcula em seguida a área dessa região.

7. Calcula $\int_0^2 e^x dx$ e apresenta o resultado arredondado a três casas decimais.

8. Calcula $\int_1^4 \sqrt{x} \, dx$ e verifica o resultado por meio da primitiva da raiz quadrada.

9. Determina a área da região limitada pelos gráficos de $y = x$ e $y = x^2$, no intervalo $[0, 1]$.

10. Calcula $\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$ e confirma o valor obtido pela geometria do gráfico.

11. Calcula $\int_1^3 (x^2 - 2x) \, dx$. Indica em que parte do intervalo a função é negativa e explica como isso afeta o significado do resultado.

12. Justificação: explica por que razão $\int_a^b f(x) \, dx$ é igual à área da região quando $f \geq 0$, e o que muda quando f toma valores negativos. Que operação é preciso fazer para obter a área geométrica nesse caso?

Soluções — Integral definido e áreas

1. Uma primitiva de $2x$ é x^2 , logo $\int_0^3 2x \, dx = [x^2]_0^3 = 9 - 0 = 9$. Geometricamente, a região é o triângulo de base 3 (de $x = 0$ a $x = 3$) e altura 6 (o valor de $2x$ em $x = 3$), cuja área é $(3 \times 6)/2 = 9 \checkmark$ — confirma-se o resultado do integral.

2. $\int_0^1 x^2 \, dx = [x^3/3]_0^1 = 1/3 - 0 = 1/3 \approx 0,333$. É a área da região limitada pela parábola $y = x^2$, pelo eixo Ox e pela reta $x = 1$: uma região «curva», mais pequena do que o triângulo de área $1/2$ que a conteria.

3. $\int_0^\pi \sin x \, dx = [-\cos x]_0^\pi = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 1 + 1 = 2$. A área é finita porque a função é **limitada** (os valores de $\sin x$ estão entre 0 e 1 neste intervalo): o comprimento do intervalo é π , mas a «altura média» é apenas $2/\pi \approx 0,64$, e a área é o produto desses fatores. Um intervalo longo não implica área grande.

4. $\int_1^e (1/x) \, dx = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$. É notável: a região sob a hipérbole $y = 1/x$ entre $x = 1$ e $x = e$ tem exatamente **1 unidade de área** — o que mostra que a base e o número de Euler estão relacionados precisamente por $\ln e = 1$.

5. $\int_0^2 (x^2 + 1) \, dx = [x^3/3 + x]_0^2 = (8/3 + 2) - 0 = 8/3 + 6/3 = 14/3 \approx 4,667$.

6. $\int_{-1}^1 x^3 \, dx = [x^4/4]_{-1}^1 = 1/4 - 1/4 = 0$. O resultado é 0 porque $f(x) = x^3$ é uma função **ímpar**: no intervalo $[-1, 0]$ a função é negativa e no intervalo $[0, 1]$ é positiva, e as duas regiões têm exatamente a mesma área. O integral conta a área **com sinal**, pelo que as duas parcelas $(-1/4$ e $+1/4)$ se cancelam. A **área geométrica** é, no entanto, $1/4 + 1/4 = 1/2$: obtém-se integrando os dois troços separadamente e somando os módulos dos resultados.

7. $\int_0^2 e^x \, dx = [e^x]_0^2 = e^2 - e^0 = e^2 - 1 \approx 7,389056 - 1 = 6,389$ (a três casas decimais).

8. A primitiva de $\sqrt{x}$ é $(2/3)x^{3/2}$, logo $\int_1^4 \sqrt{x} \, dx = [(2/3)x^{3/2}]_1^4 = (2/3) \times 4^{3/2} - (2/3) \times 1^{3/2}$. Como $4^{3/2} = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8$, obtém-se $(2/3) \times 8 - (2/3) \times 1 = 16/3 - 2/3 = 14/3 \approx 4,667$.

9. No intervalo $[0, 1]$ tem-se $x \geq x^2$ (basta notar que $x - x^2 = x(1 - x) \geq 0$), logo o gráfico de $y = x$ está **acima** do de $y = x^2$. A área é $\int_0^1 (x - x^2) \, dx = [x^2/2 - x^3/3]_0^1 = (1/2 - 1/3) - 0 = 3/6 - 2/6 = 1/6 \approx 0,167$. Confirmação geométrica: o quadrado unitário tem área 1 e a região pedida é a parte desse quadrado acima da parábola.

10. $\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = \sin(\pi/2) - \sin 0 = 1 - 0 = 1$. Geometricamente, a região sob um arco completo da função cosseno desde 0 até ao seu primeiro zero tem exatamente **1 unidade de área** — um resultado «redondo» que serve de controlo.

11. $\int_1^3 (x^2 - 2x) \, dx = [x^3/3 - x^2]_1^3 = (27/3 - 9) - (1/3 - 1) = (9 - 9) - (-2/3) = 0 + 2/3 = 2/3 \approx 0,667$. A função $f(x) = x^2 - 2x = x(x - 2)$ é **negativa** no intervalo $]0, 2[$, portanto **em $[1, 2[$** o gráfico está abaixo do eixo Ox e o integral recolhe aí uma contribuição negativa: o troço $[1, 2]$ contribui com $-2/3$ e o troço $[2, 3]$ com $+4/3$, cuja soma é $2/3$. Assim, o valor $2/3$ **não** é a área geométrica da região: essa seria $|-2/3| + 4/3 = 2$.

12. Quando $f \geq 0$ em $[a, b]$, o integral $\int_a^b f(x) \, dx$ é a área da região entre o gráfico e o eixo Ox porque o integral é o limite das somas de áreas de retângulos de altura $f(x)$ e base infinitesimal dx : cada parcela $f(x) \, dx$ é exatamente a área de uma faixa vertical, e o limite da soma dessas faixas é a área total (e todas as parcelas são positivas, pelo que nada se cancela). Quando f toma valores **negativos**, cada faixa $f(x) \, dx$ contribui com sinal negativo, e o integral passa a medir a **área com sinal** — regiões abaixo do eixo Ox contam negativamente; é por isso que $\int_{-1}^1 x^3 \, dx = 0$ com a região a ter área $1/2$. Para obter a **área geométrica** é preciso: (i) determinar os zeros de f e dividir $[a, b]$ nos troços onde o sinal é constante; (ii) calcular o integral em cada troço; (iii) somar os **módulos** dos valores obtidos — ou seja, aplicar o módulo à função antes de integrar.

Nota: a distinção entre **área com sinal** (o integral) e **área geométrica** (o integral do módulo) é a principal armadilha desta ficha — e a razão pela qual se devem sempre localizar os zeros da função antes de calcular uma área.