

Ficha 1 — Raciocínio inferencial, parâmetros e estimadores

12.º Ano

Matemática A

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: distinguir raciocínio indutivo de dedutivo, identificar população, amostra, parâmetro e estatística, distinguir estimador de estimativa e reconhecer amostras aleatórias com e sem reposição.

Revisão rápida — o vocabulário da inferência

- **Raciocínio dedutivo:** parte do geral para o particular — se as premissas são verdadeiras, a conclusão é **certamente** verdadeira. É o raciocínio das demonstrações matemáticas.
- **Raciocínio indutivo:** parte de casos particulares para uma conclusão geral. A conclusão é **plausível**, mas não certa: uma única observação contrária pode invalidá-la. É o raciocínio da estatística.
- **População:** o conjunto **total** dos elementos sobre os quais se pretende concluir. **Amostra:** subconjunto da população efetivamente observado.
- **Parâmetro:** característica **fixa** da população (por exemplo μ , a média populacional). Em geral é **desconhecido** — é precisamente por isso que se recorre a uma amostra.
- **Estatística:** característica calculada **a partir da amostra** (por exemplo $\bar{x}$, a média amostral). Varia de amostra para amostra: é uma variável aleatória.
- **Estimador:** a **regra** ou função usada para estimar o parâmetro (a média amostral $\bar{x}$ é um estimador de μ). **Estimativa:** o **valor numérico** obtido numa amostra concreta ($\bar{x} = 12,4$ é uma estimativa).
- **Amostra aleatória:** todos os elementos da população têm a mesma probabilidade de ser escolhidos, e as escolhas são independentes. Com **reposição** um elemento pode voltar a sair; **sem reposição** não. Numa população grande, a diferença é desprezável.

Exercícios

1. Dedutivo ou indutivo? Classifica cada situação e justifica: (a) «Todos os múltiplos de 6 são pares; 42 é múltiplo de 6; logo 42 é par.» (b) «Nas últimas 50 encomendas entregues, 46 chegaram no prazo; logo cerca de 92% das encomendas chegam no prazo.»

2. Identificar o vocabulário: para saber a altura média dos 1200 alunos de uma escola, mediram-se 80 alunos escolhidos ao acaso, obtendo-se uma média de 1,67 m. Identifica a população, a amostra, o parâmetro, a estatística, o estimador e a estimativa.

3. Parâmetro ou estatística? Classifica: (a) a percentagem de portugueses que leem jornais diariamente; (b) a percentagem de leitores de jornais em 500 inquiridos; (c) o número médio de filhos das famílias de uma cidade; (d) o número médio de filhos em 60 famílias entrevistadas.

4. Contar amostras: de um grupo de 5 pessoas querem-se escolher 2 para uma entrevista. Quantas amostras distintas existem se a escolha for (a) sem reposição; (b) com reposição? Explica a diferença.

5. Estimativa pontual: uma população tem os valores {12, 15, 18, 20, 25}, cuja média é 18. Retira-se a amostra {15, 20}. Calcula a média amostral e compara-a com o parâmetro, comentando a diferença.

6. Estimador e estimativa: explica, em duas frases, a diferença entre estimador e estimativa. Dá um exemplo de cada, no caso da média.

7. Amostras de conveniência: para estimar o tempo médio que os alunos passam a estudar, um investigador inquiriu apenas os alunos que estavam na biblioteca. Explica por que razão esta amostra é enviesada e propõe um processo de amostragem mais adequado.

8. Variabilidade: duas amostras diferentes retiradas da mesma população deram médias de 1,65 m e 1,70 m. Explica por que razão as médias diferem, embora a população seja a mesma, e que nome se dá a esta variabilidade.

9. Estimativa a partir de uma amostra: numa escola com 1200 alunos escolheu-se aleatoriamente uma amostra de 50 e obteve-se uma nota média de 12,4 valores. Indica a estimativa pontual da nota média da escola e explica por que razão este valor não é, em geral, igual ao parâmetro.

10. Com ou sem reposição? Explica a diferença entre amostragem com reposição e sem reposição e indica qual delas se usa habitualmente em sondagens, justificando.

11. Justificação: explica o que significa dizer que a média amostral é um estimador centrado (não enviesado) da média populacional e por que razão essa propriedade é desejável.

12. Leitura crítica: um jornal escreve: «Uma sondagem a 1000 pessoas revela que 62% dos portugueses apoiam a medida.» Identifica o parâmetro e a estatística, explica por que razão 62% não é o valor exato do parâmetro e indica um fator que pode introduzir erro além da aleatoriedade da amostra.

Soluções — Raciocínio inferencial, parâmetros e estimadores

1. (a) **Dedutivo**: parte de uma afirmação geral (todos os múltiplos de 6 são pares) e conclui um caso particular, com certeza absoluta. (b) **Indutivo**: parte de 50 casos particulares e generaliza para o conjunto das encomendas — a conclusão é plausível, mas não garantida (as próximas encomendas podem comportar-se de modo diferente).

2. **População**: os 1200 alunos da escola. **Amostra**: os 80 alunos medidos. **Parâmetro**: a altura média dos 1200 alunos (desconhecida). **Estatística**: a altura média dos 80 alunos medidos (1,67 m). **Estimador**: a média amostral $\bar{x}$ (a regra geral). **Estimativa**: o valor 1,67 m obtido nesta amostra.

3. (a) **Parâmetro** — diz respeito a toda a população de portugueses. (b) **Estatística** — calculada apenas nos 500 inquiridos. (c) **Parâmetro** — característica de toda a população da cidade. (d) **Estatística** — calculada a partir das 60 famílias entrevistadas.

4. (a) **Sem reposição**: a ordem não interessa e não se repetem pessoas, pelo que o número de amostras é ${}^5C_2 = 10$. (b) **Com reposição**: cada uma das 2 escolhas pode recair em qualquer das 5 pessoas, admitindo repetição, logo há $5^2 = 25$ amostras. A diferença está em que, com reposição, a mesma pessoa pode ser escolhida duas vezes e a ordem passa a distinguir amostras.

5. A média amostral é $(15 + 20)/2 = 17,5$, enquanto o parâmetro é $\mu = 18$. A estimativa não coincide com o parâmetro: $17,5 < 18$. Com apenas 2 elementos, a amostra pode sobre- ou sub-representar valores altos ou baixos da população — é essa a origem do **erro de amostragem**, que diminui à medida que o tamanho da amostra aumenta.

6. O **estimador** é a regra (função) que se aplica aos dados — é uma variável aleatória, porque muda de amostra para amostra; a **estimativa** é o número concreto que essa regra produz numa amostra observada. Exemplo: $\bar{x}$ é o estimador de μ ; se numa amostra se obteve $\bar{x} = 12,4$, então 12,4 é a estimativa.

7. A amostra é **enviesada** porque os alunos que estão na biblioteca tendem a estudar mais do que a generalidade dos alunos: a amostra não representa a população, sobrestimando sistematicamente o tempo de estudo. O processo adequado é uma **amostragem aleatória**: escolher os alunos ao acaso a partir de uma lista completa de todos os alunos da escola, de modo que todos tenham a mesma probabilidade de ser inquiridos.

8. As médias diferem porque cada amostra contém elementos diferentes, escolhidos ao acaso: uma pode conter mais alunos altos, outra mais alunos baixos. Esta variação das estimativas de amostra para amostra chama-se **variabilidade amostral** (ou erro de amostragem). Note-se que o parâmetro é fixo — o que varia é a estatística.

9. A **estimativa pontual** da nota média da escola é **12,4 valores**. Não é, em geral, igual ao parâmetro porque se observou apenas uma amostra de 50 alunos entre 1200: outras amostras do mesmo tamanho dariam, com grande probabilidade, médias ligeiramente diferentes. A estimativa é um valor plausível, não o valor exato.

10. Na amostragem **com reposição** cada elemento escolhido é devolvido à população antes da escolha seguinte (podendo voltar a sair); **sem reposição** os elementos já escolhidos são retirados. Em sondagens usa-se habitualmente a amostragem **sem reposição** — não faz sentido inquirir a mesma pessoa duas vezes. Como a população é muito maior do que a amostra, a diferença entre os dois processos é, na prática, desprezável.

11. Dizer que $\bar{x}$ é um estimador **centrado** de μ significa que, se se repetisse a amostragem muitas vezes, a **média de todas as estimativas obtidas seria igual a μ** — ou seja, $\bar{x}$ não erra sistematicamente para cima nem para baixo. Esta propriedade é desejável porque garante que o método de estimação não introduz um desvio de fundo: os erros de amostras concretas compensam-se em média, e o erro diminui quando o tamanho da amostra aumenta.

12. O **parâmetro** é a verdadeira percentagem de portugueses que apoiam a medida (desconhecida); a **estatística** é os 62% observados nos 1000 inquiridos. Os 62% não são o valor exato do parâmetro porque resultam de **uma única amostra**: outra amostra de 1000 pessoas daria, quase certamente, uma percentagem diferente (variabilidade amostral). Além da aleatoriedade, há fatores que podem introduzir **enviesamento**: por exemplo, o modo como as pessoas foram escolhidas (só por telefone fixo excluiria parte da população) ou a formulação da pergunta, que pode induzir a resposta.

Nota: a palavra-chave de toda esta matéria é **representatividade** — uma amostra grande mas enviesada pode ser pior do que uma amostra pequena escolhida ao acaso. O raciocínio inferencial só é legítimo quando a amostra é aleatória.