

Resumo — Funções exponencial e logarítmica

12.º Ano

Matemática A

2 páginas

Síntese

Esta síntese reúne o estudo das funções exponencial e logarítmica do 12.º ano: definição e propriedades das potências de expoente real, o número de Euler, a função inversa e o teste da reta horizontal, a função logarítmica e as propriedades operatórias dos logaritmos, a função composta, equações e inequações exponenciais e logarítmicas e a modelação de fenómenos de crescimento e decaimento.

1. Função exponencial

- A função $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, tem domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $]0, +\infty[$ — é sempre positiva e nunca se anula, qualquer que seja x .
- Propriedades das potências:** $a^0 = 1$; $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$; $a^{x-y} = a^x/a^y$; $(a^x)^y = a^{xy}$; $a^{-x} = 1/a^x$.
- Monotonia:** se $a > 1$ a função é estritamente **crescente** ($2^8 = 256$, $2^{10} = 1024$); se $0 < a < 1$ é estritamente **decrecente**.
- A monotonia é o que permite **comparar** potências: sendo $a > 1$, $a^u > a^v \iff u > v$; e $a^u = a^v \iff u = v$.
- O gráfico passa sempre por **(0, 1)** e tem a reta $y = 0$ (o eixo Ox) como **assíntota horizontal**.

2. O número de Euler

- O número $e \approx 2,718281828...$ é irracional e surge como o valor para que tende $(1 + 1/n)^n$ quando n cresce indefinidamente.
- A função $f(x) = e^x$ é a exponencial de base e ; é estritamente crescente e é a exponencial mais usada em modelação.
- Valores de referência: $e^0 = 1$, $e^1 = e \approx 2,718282$, $e^{-1} = 1/e \approx 0,367879$, $e^{-2} \approx 0,135335$.

3. Função inversa

- Uma função f é **invertível** quando é injetiva (a cada valor do contradomínio corresponde um único x). O **teste da reta horizontal** deteta isso no gráfico: qualquer reta horizontal interseca o gráfico no máximo uma vez.
- A **inversa** f^{-1} desfaz o que f faz: $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo o x do domínio de f , e $f(f^{-1}(y)) = y$ para todo o y do contradomínio.
- Domínio e contradomínio **trocam**: $D_{f^{-1}} = f(D)$ e $f^{-1}(D) = D_f$.
- Os gráficos de f e de f^{-1} são **simétricos em relação à reta $y = x$** (a bissetriz dos quadrantes ímpares).
- Erro clássico:** o «-1» em f^{-1} **não** é um expoente — $f^{-1}(x)$ não é $1/f(x)$.

4. Função logarítmica

- Definição:** $\log_a x = y \iff a^y = x$, com $a > 0$, $a \neq 1$ e $x > 0$ — o logaritmo é, por definição, o expoente a que é preciso elevar a base para obter x .
- A função $g(x) = \log_a x$ tem domínio $]0, +\infty[$ e contradomínio $\mathbb{R}$: é exatamente a **inversa** da exponencial de base a . Como tal, o seu gráfico é a imagem de $y = a^x$ por reflexão em $y = x$, e tem a reta $x = 0$ como assíntota vertical.
- Valores imediatos: $\log_a 1 = 0$ (pois $a^0 = 1$); $\log_a a = 1$ (pois $a^1 = a$). Exemplos: $\log_2 8 = 3$, $\log_3 9 = 2$, $\log_4 64 = 3$, $\log_9 27 = 3/2$ (pois $9^{1.5} = 27$).
- O **logaritmo natural** é o de base e e escreve-se **ln x** ($\ln x = \log_e x$); o **logaritmo decimal** é o de base 10 e escreve-se **log x**.
- Monotonia: crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$.

5. Propriedades operatórias dos logaritmos

- Logaritmo de um produto:** $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$.
- Logaritmo de um quociente:** $\log_a(x / y) = \log_a x - \log_a y$.
- Logaritmo de uma potência:** $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a x$ — em particular $\log_a(1/x) = -\log_a x$ e $\log_a \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log_a x$.
- Mudança de base:** $\log_a x = \log_b x / \log_b a$ — é esta a fórmula que permite calcular $\log_5 20$ numa máquina que só tem **ln** e **log**: $\log_5 20 = \ln 20 / \ln 5 \approx 3,5/1,6094 \approx 1,8614$. Consequência útil: $\log_a x \cdot \log_x a = 1$ (por exemplo $\log_2 5 \cdot \log_5 2 = 1$).

Atenção: o logaritmo **não** «distribui» pela soma nem pela diferença — $\log(x + y)$ **não** é $\log x + \log y$, e $\log(x - y)$ não é $\log x - \log y$. As propriedades acima valem apenas para produtos, quocientes e potências.

6. Função composta

- A **composta** de f com g é $(f \circ g)(x) = f(g(x))$: aplica-se primeiro g e depois f . O domínio é formado pelos x do domínio de g para os quais $g(x)$ pertence ao domínio de f .
- A composição **não é comutativa**: com $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 1$ tem-se $f(g(3)) = 16$ e $g(f(3)) = 10$. Nas composições com exponenciais e logaritmos usa-se a relação de inversa: $e^{\ln x} = x$ ($x > 0$) e $\ln(e^x) = x$.

7. Equações e inequações exponenciais

- Método por igualdade de bases**: sendo $a > 0$ e $a \neq 1$, $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$. Exemplo: $2^{3x-1} = 2^5 \Rightarrow 3x - 1 = 5 \Rightarrow x = 2$.
- Método por logaritimização**: quando não é possível igualar bases, aplicam-se logaritmos a ambos os membros ($3^{2x-1} = 27 \Rightarrow x = 2$; $4^x = 8 \Rightarrow x = \log 8 / \log 4 = 1,5$).
- Nunca esquecer**: $a > 0$, $a \neq 1$, e uma potência de base positiva é **sempre positiva** — $a^x = -3$ é **impossível**.

8. Equações e inequações logarítmicas

- Condições prévias (domínio)**: todos os logaritmos exigem argumento **estritamente positivo**. Resolve-se sempre as condições **antes** de avançar, e no fim confirma-se que as soluções as satisfazem (podem surgir soluções «estranhas» a eliminar).
- Equação**: $\log_a X = \log_a Y \Leftrightarrow X = Y$ (com $X, Y > 0$). Se a equação for $\log_a X = k$, então $X = a^k$ — por exemplo $\log_2(x - 3) = 2 \Rightarrow x - 3 = 4 \Rightarrow x = 7$, que verifica a condição $x - 3 > 0$.
- Inequações**: a monotonia decide o sentido. Com $a > 1$, $\log_a X > \log_a Y \Leftrightarrow X > Y$ (o sentido **mantém-se**); com $0 < a < 1$, o sentido **inverte-se**.

9. Modelação com exponenciais

- Crescimento exponencial**: $N(t) = N_0 \cdot a^t$, com N_0 o valor inicial e $a > 1$ o fator de crescimento por unidade de tempo — a evolução é multiplicativa (cresce sempre o mesmo em percentagem).
- Decaimento**: a mesma expressão com $0 < a < 1$ (desintegração radioativa, arrefecimento); a **semivida** é o tempo ao fim do qual a quantidade se reduz a metade.
- Exemplo resolvido**: uma cultura de bactérias com $N(t) = 500 \cdot 2^t$ (t em horas) atinge 32 000 quando $2^t = 64$, isto é **$t = 6$ horas** — pois $500 \cdot 2^6 = 500 \cdot 64 = 32\,000$.
- Capital com juro composto**: $C(t) = C_0(1 + i)^t$; com $i = 3\%$ ao ano, o capital duplica quando $1,03^t = 2$, isto é $t = \ln 2 / \ln 1,03 \approx 23,4$ anos.

10. Tabela-resumo

Ideia	Expressão	Observação
Exponencial	$f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$	$D = \mathbb{R}$, $D' =]0, +\infty[$
Logaritmo	$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$	só para $x > 0$
Produto / quociente	$\log(xy) = \log x + \log y$	$\log(x/y) = \log x - \log y$
Mudança de base	$\log_a x = \log_b x / \log_b a$	permite usar $\ln$ ou $\log$
Crescimento	$N(t) = N_0 a^t$	$a > 1$ cresce, $a < 1$ decai

11. Erros frequentes a evitar

- Confundir $f^{-1}(x)$ com $1/f(x)$ — a inversa não é o recíproco; e escrever $\log(x + y) = \log x + \log y$ (a propriedade é válida para o **produto**).
- Resolver equações logarítmicas **sem** impor as condições de domínio, ou calcular $\log_a x$ sem **mudar de base**.
- Inverter (ou não inverter) o sentido da inequação com a base errada: com $0 < a < 1$ o sentido **inverte-se**.
- Tratar crescimentos exponenciais como lineares: duplicar o tempo **não** duplica a quantidade.

Controlo rápido: $\log_2 8 = 3$ e $\log_9 27 = 3/2$ (pois $27 = 9^{1,5}$); $\log_5 20 \approx 1,8614$, por mudança de base; e com $i = 3\%$ ao ano o capital duplica ao fim de $\ln 2 / \ln 1,03 \approx 23,4$ anos.