

Teste de Matemática — Funções exponencial e logarítmica

12.º Ano Matemática A 10 questões 20 valores 3 páginas

Instruções: apresenta todos os cálculos e, nas questões de justificação, explica o raciocínio que te levou à conclusão. Nas equações logarítmicas começa **sempre** por impor as condições de domínio. Quando o resultado for aproximado, indica também o valor exato. Duração: 90 minutos.

Grupo I — Potências, logaritmos e domínios

1. (2 valores) Resolve a equação $2^{3x-1} = 32$.
2. (2 valores) Calcula o valor exato de $\log_2 8 + \log_9 27$ e apresenta o resultado na forma de fração irredutível.
3. (2 valores) Determina o domínio da função $f(x) = \log_2(x - 3)$ e indica a equação da sua assíntota vertical.
4. (2 valores) Resolve a equação $e^x = 5$, apresentando o valor exato e o valor arredondado a três casas decimais.

Grupo II — Propriedades operatórias e equações

5. (2 valores) Usando a mudança de base, calcula $\log_5 20$ com quatro casas decimais. Indica a fórmula que utilizaste.

6. (2 valores) Resolve a equação $4^x = 8$, apresentando o resultado na forma de fração irredutível e justificando o método usado.

7. (2 valores) Mostra que $\log_2 5 \times \log_5 2 = 1$, partindo da mudança de base.

Grupo III — Função inversa, composição e modelação

8. (2 valores) Determina a expressão analítica da inversa de $f(x) = e^x - 2$ e indica o seu domínio.

9. (2 valores) O número de bactérias de uma cultura é dado por $N(t) = 500 \times 2^t$, com t em horas. Determina quantas horas são necessárias para a cultura atingir 32 000 bactérias e explica o método.

10. (2 valores) Sejam $f(x) = \ln x$ e $g(x) = x^2$. Calcula $(f \circ g)(e)$ e $(g \circ f)(e)$ e mostra que a composição não é comutativa.

Soluções — Teste de Funções exponencial e logarítmica

- Escreve-se 32 como potência de base 2: $32 = 2^5$. Então $2^{3x-1} = 2^5$, e como a exponencial de base 2 é injetiva, $3x - 1 = 5$, donde $3x = 6$ e $x = 2$.
- $\log_2 8 = 3$, pois $2^3 = 8$. Quanto a $\log_9 27$: $9 = 3^2$ e $27 = 3^3$, logo $\log_9 27 = 3/2$ (verificação: $9^{1.5} = 27$). A soma é $3 + 3/2 = 9/2 = 4,5$.
- O logaritmo exige argumento estritamente positivo: $x - 3 > 0$, isto é $x > 3$. O domínio é $]3, +\infty[$. Como em $x \rightarrow 3^+$ o logaritmo tende para $-\infty$, a reta $x = 3$ é assíntota vertical ao gráfico.
- Aplicando o logaritmo natural a ambos os membros: $\ln(e^x) = \ln 5$, donde $x = \ln 5$ (valor exato). Aproximadamente, $x \approx 1,609$.
- Pela fórmula de mudança de base, $\log_3 x = \ln x / \ln 3$. Logo $\log_3 20 = \ln 20 / \ln 3 \approx 2,9957/1,6094 \approx 1,8614$.
- Não é possível igualar as bases diretamente (8 não é potência inteira de 4), pelo que se aplica logaritmos: $\log(4^x) = \log 8$, donde $x \log 4 = \log 8$ e $x = \log 8 / \log 4 = 3/2$.
Confirmação: $4^{1.5} = (2^2)^{1.5} = 2^3 = 8 \checkmark$
- Por mudança de base, $\log_2 5 = \ln 5 / \ln 2$ e $\log_5 2 = \ln 2 / \ln 5$. Multiplicando: $(\ln 5 / \ln 2) \times (\ln 2 / \ln 5) = 1$, pois os fatores cancelam-se. O resultado é geral: $\log_a b \times \log_b a = 1$.
- Fazendo $y = e^x - 2$ e resolvendo em ordem a x : $y + 2 = e^x$, donde $x = \ln(y + 2)$. Logo $f^{-1}(x) = \ln(x + 2)$. O domínio é $]-2, +\infty[$, que é exatamente o contradomínio de f (pois $e^x - 2 > -2$).
- Pretende-se $N(t) = 32\,000$, isto é $500 \times 2^t = 32\,000$. Dividindo por 500: $2^t = 64$. Como $64 = 2^6$, tem-se $t = 6$ horas. Confirmação: $500 \times 2^6 = 500 \times 64 = 32\,000 \checkmark$
- $(f \circ g)(e) = f(g(e)) = f(e^2) = \ln(e^2) = 2$. Por outro lado, $(g \circ f)(e) = g(f(e)) = g(\ln e) = g(1) = 1^2 = 1$. Como $2 \neq 1$, a composição não é comutativa: $f \circ g$ e $g \circ f$ dão resultados diferentes para o mesmo valor de x .

Nota: nas questões 3 e 5 fica claro que o domínio e a mudança de base são os dois pontos críticos desta matéria — o primeiro porque nada se pode resolver fora dele, o segundo porque é o único modo de calcular logaritmos de bases que a máquina não tem.