

Ficha 3 — Função logarítmica

12.º Ano Matemática A 4 páginas 12 exercícios

Objetivo: reconhecer a função logarítmica como inversa da exponencial, converter entre as duas formas, aplicar as propriedades operatórias dos logaritmos, mudar de base e representar graficamente funções logarítmicas indicando domínio, zero, monotonia e assíntota.

Revisão rápida — função logarítmica

- Definição:** $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$, com $a > 0$, $a \neq 1$ e $x > 0$. O logaritmo é o **expoente a que é preciso elevar a base** para obter x .
- A função logarítmica $f(x) = \log_a x$ é a **inversa** da exponencial $g(x) = a^x$: os gráficos são simétricos em relação à reta $y = x$.
- Domínio e contradomínio:** $D =]0, +\infty[$ (só existem logaritmos de números positivos) e contradomínio $\mathbb{R}$. O zero é $x = 1$ (porque $\log_a 1 = 0$) e a reta $x = 0$ é assíntota vertical.
- Valores de referência:** $\log_a 1 = 0$ e $\log_a a = 1$. A função é **crescente se $a > 1$** e decrescente se $0 < a < 1$.
- Propriedades operatórias:** $\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v$, $\log_a(u/v) = \log_a u - \log_a v$, $\log_a(u^n) = n \log_a u$.
- Identidades inversas:** $a^{\log_a x} = x$ (para $x > 0$) e $\log_a(a^x) = x$.
- Mudança de base:** $\log_a x = \log_b x / \log_b a$. Consequência útil: $\log_a x = 1 / \log_x a$.

Exercícios

1. Conversões: escreve na forma logarítmica ou exponencial, conforme indicado: a) $2^3 = 8$ na forma logarítmica · b) $5^0 = 1$ na forma logarítmica · c) $\log_3(1/9) = -2$ na forma exponencial.

2. Cálculo de logaritmos: calcula, sem calculadora: a) $\log_2 32$ · b) $\log_3 81$ · c) $\log_{10} 1000$ · d) $\log_5 1$.

3. Propriedades operatórias: aplica as propriedades para calcular: a) $\log_2(8 \times 4)$ · b) $\log_3(81/9)$ · c) $\log_2 8^3$.

4. Simplificação: calcula: a) $\log_5 25 + \log_5 5 \cdot b) \log_2 16 - \log_2 4 \cdot c) 3^{\log_3 7}$.

5. Domínio e zeros: determina o domínio e o zero de cada função: a) $f(x) = \log_3 x \cdot b) g(x) = \log_2(x - 3) \cdot c) h(x) = \log(x + 5) + 2$ (logaritmo decimal).

6. Monotonia: indica se cada função é crescente ou decrescente e justifica: a) $f(x) = \log_3 x \cdot b) g(x) = \log_{0,5} x \cdot c) h(x) = \log x$ (base 10).

7. Gráficos: descreve a relação entre os gráficos de $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = 2^x$ e identifica um ponto de cada gráfico que confirme essa relação.

8. Mudança de base: usando a fórmula de mudança de base, calcula: a) $\log_4 64$ · b) $\log_9 27$.

9. Equação logarítmica: resolve a equação $\log_2(x + 3) = 4$ e confirma a solução.

10. Comparação: calcula $\log_2 5$ e $\log_5 2$ (aproximados às milésimas) e verifica a relação $\log_2 5 = 1 / \log_5 2$. Comenta por que razão um dos valores é maior do que 1 e o outro menor.

11. Justificação: explica por que razão $\log_a 1 = 0$ e $\log_a a = 1$ para qualquer base válida, e por que razão o domínio da função logarítmica é $]0, +\infty[$.

12. (Python) O programa seguinte calcula quatro logaritmos em bases diferentes usando a função `log`, que aceita a base como segundo argumento. Executa-o e indica exatamente o que é impresso, confirmando os resultados das questões 2 e 8.

```
from math import log

print('log2(32):', log(32, 2))
print('log3(81):', log(81, 3))
print('log5(100):', round(log(100, 5), 4))
print('log9(27):', log(27, 9))
```

Dica: antes de aplicar propriedades, confirma sempre que **os argumentos são positivos** — é a condição de existência do logaritmo e a origem mais comum de erros. E lembra-te de que $\log_a(u + v)$ **não** se pode separar: as propriedades valem para produtos, quocientes e potências, nunca para somas.

Soluções — Função logarítmica

1. a) $2^3 = 8 \Leftrightarrow \log_2 8 = 3$ · b) $5^0 = 1 \Leftrightarrow \log_5 1 = 0$ · c) $\log_3(1/9) = -2 \Leftrightarrow 3^{-2} = 1/9$.

2. a) $\log_2 32 = 5$, porque $2^5 = 32$ · b) $\log_3 81 = 4$, porque $3^4 = 81$ · c) $\log_{10} 1000 = 3$, porque $10^3 = 1000$ · d) $\log_5 1 = 0$, porque $5^0 = 1$ (e $\log_a 1 = 0$ para qualquer base válida).

3. a) $\log_2(8 \times 4) = \log_2 8 + \log_2 4 = 3 + 2 = 5$ (= $\log_2 32$ ✓) · b) $\log_3(81/9) = \log_3 81 - \log_3 9 = 4 - 2 = 2$ (= $\log_3 9$ ✓) · c) $\log_2 8^3 = 3 \times \log_2 8 = 3 \times 3 = 9$ (= $\log_2 512$, porque $2^9 = 512$ ✓).

4. a) $\log_5 25 + \log_5 5 = 2 + 1 = 3$ · b) $\log_2 16 - \log_2 4 = 4 - 2 = 2$ · c) $3^{\log_3 7} = 7$, pela identidade inversa $a^{\log_a x} = x$.

5. a) $D =]0, +\infty[$ (e zero em $x = 1$ ($\log_3 1 = 0$)) · b) exige-se $x - 3 > 0$, logo $D =]3, +\infty[$; o zero resolve-se por $\log_2(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 2^0 = 1 \Leftrightarrow x = 4$ · c) exige-se $x + 5 > 0$, logo $D =]-5, +\infty[$; o zero resolve-se por $\log(x + 5) = -2 \Leftrightarrow x + 5 = 10^{-2} = 0,01 \Leftrightarrow x = -4,99$. A reta $x = -5$ é assíntota vertical.

6. a) $f(x) = \log_3 x$ é **crescente**, porque a base 3 é maior do que 1 · b) $g(x) = \log_{0,5} x$ é **decrecente**, porque $0 < 0,5 < 1$ · c) $h(x) = \log x$ é **crescente**, porque a base 10 é maior do que 1.

7. Como $f(x) = \log_2 x$ é a inversa de $g(x) = 2^x$, os seus gráficos são **simétricos em relação à reta $y = x$** : cada ponto (a, b) de um gráfico corresponde ao ponto (b, a) do outro. Confirmação: $2^5 = 32$, pelo que o ponto **(5, 32)** pertence ao gráfico de g ; e $\log_2 32 = 5$, pelo que o ponto **(32, 5)** pertence ao gráfico de f — coordenadas exatamente trocadas. (Analogamente, (0, 1) em g corresponde a (1, 0) em f .)

8. a) $\log_4 64 = \log_2 64 / \log_2 4 = 6/2 = 3$ (e, de facto, $4^3 = 64$ ✓) · b) $\log_9 27 = \log_3 27 / \log_3 9 = 3/2 = 1,5$ (e $9^{1,5} = \sqrt{9^3} = 27$ ✓).

9. $\log_2(x + 3) = 4 \Leftrightarrow x + 3 = 2^4 = 16 \Leftrightarrow x = 13$. Confirmação: $\log_2(13 + 3) = \log_2 16 = 4$ ✓ (e o argumento 16 é positivo, como o domínio exige).

10. $\log_2 5 = 2,322$ e $\log_5 2 = 0,431$. Verifica-se $\log_2 5 = 1 / \log_5 2$, porque $2,322 \times 0,431 \approx 1,000$ ✓. O primeiro valor é maior do que 1 porque $5 > 2$ (é preciso um expoente superior a 1 para a base 2 chegar a 5), e o segundo é menor do que 1 porque $2 < 5$ (a base 5 já ultrapassa 2 antes do expoente 1). Em geral, $\log_a x > 1$ quando $x > a$ e $\log_a x < 1$ quando $x < a$.

11. $\log_a 1 = 0$ porque $a^0 = 1$ para qualquer base válida — basta ler a definição ao contrário. Do mesmo modo, $\log_a a = 1$ porque $a^1 = a$. Quanto ao domínio: um logaritmo é um expoente que se dá à base para obter o argumento, e como $a^y > 0$ para qualquer expoente y real, a potência a^y nunca pode ser nula nem negativa. Logo não existe nenhum y tal que $a^y = x$ quando $x \leq 0$, e o domínio é **$]0, +\infty[$** .

12. O programa imprime: **log2(32): 5.0 · log3(81): 4.0 · log5(100): 2.8614 · log9(27): 1.5**. Os dois primeiros coincidem com as alíneas a) e b) da questão 2 (5 e 4) e o último com a alínea b) da questão 8 (1,5). O terceiro valor, 2,8614, não tem forma exata elementar: comprova que $5^{2,8614} \approx 100$, o que mostra como o logaritmo funciona como expoente mesmo quando o resultado é irracional.

Nota: a função logarítmica e a exponencial **desfazem-se mutuamente** (são inversas), e é essa relação — e não a memorização de tabelas — que explica tanto o domínio $]0, +\infty[$ da logarítmica como o contradomínio $]0, +\infty[$ da exponencial.