

Ficha 2 — Funções invertíveis e função inversa

12.º Ano Matemática A 4 páginas 12 exercícios

Objetivo: decidir se uma função é invertível pelo teste da reta horizontal (gráfica e algebricamente), determinar expressões de funções inversas, relacionar domínios e contradomínios e reconhecer a simetria dos gráficos de f e f^{-1} em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Revisão rápida — funções invertíveis e inversa

- Uma função f é **injetiva** se valores diferentes do domínio tiverem imagens diferentes: $f(a) = f(b) \implies a = b$. Só as funções **injetivas** têm inversa.
- **Teste da reta horizontal:** se alguma reta horizontal corta o gráfico em **mais do que um ponto**, a função não é injetiva. Exemplos: $y = x^2$ e $y = |x|$ falham; $y = x^3$ e $y = 2^x$ passam.
- **Teste algébrico:** parte-se de $f(a) = f(b)$ e procura-se concluir $a = b$. Quando a conclusão falha (por exemplo $a = \pm b$), a função não é injetiva.
- **Função inversa f^{-1} :** é a função que «desfaz» o efeito de f , verificando $f(f^{-1}(x)) = x$ para todo o x do contradomínio de f e $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo o x do domínio de f .
- **Domínio e contradomínio trocam de papel:** $D(f^{-1}) =$ contradomínio de f e o contradomínio de $f^{-1} = D(f)$.
- **Simetria:** os gráficos de f e f^{-1} são **simétricos em relação à reta $y = x$** (bissetriz dos quadrantes ímpares). Consequência: se (a, b) pertence ao gráfico de f , então **(b, a)** pertence ao gráfico de f^{-1} .
- **Inversas de referência:** a inversa de $f(x) = a^x$ é $f^{-1}(x) = \log_a x$; a inversa de $f(x) = x^3$ é $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$; a inversa de $f(x) = 1/x$ é a própria função.

Exercícios

1. Teste da reta horizontal: indica, justificando com o aspeto do gráfico, quais destas funções são invertíveis: a) $f(x) = x^2$, com $x \in \mathbb{R}$ · b) $g(x) = x^3$ · c) $h(x) = |x|$ · d) $t(x) = 2^x$.

2. Teste algébrico: mostra, algebricamente, que $f(x) = 2x + 3$ é injetiva.

3. Restrição do domínio: mostra que $g(x) = x^2 - 4x$ não é injetiva em $\mathbb{R}$, indicando dois objetos diferentes com a mesma imagem, e explica qual a restrição do domínio que a torna invertível.

4. Determinação da inversa: para $f(x) = 2x + 3$, determina a expressão de f^{-1} e verifica as duas igualdades $f(f^{-1}(x)) = x$ e $f^{-1}(f(x)) = x$.

5. Exponencial e logarítmica: para $f(x) = 3^x$, escreve a expressão de f^{-1} e indica o domínio e o contradomínio de cada uma das funções.

6. Função cúbica: para $f(x) = x^3$, escreve a expressão de f^{-1} e calcula $f^{-1}(8)$, $f^{-1}(27)$ e $f^{-1}(0)$.

7. Inversa de si própria: mostra que $f(x) = 1/x$, com $x \neq 0$, é a sua própria inversa.

8. Domínios e contradomínios: uma função bijetiva f tem domínio $[0, +\infty[$ e contradomínio $[3, +\infty[$. Indica o domínio e o contradomínio de f^{-1} e justifica.

9. Simetria: explica por que razão os gráficos de f e f^{-1} são simétricos em relação à reta $y = x$ e verifica essa relação com o ponto $(3, 8)$ do gráfico de $f(x) = 2^x$ e o ponto correspondente no gráfico da sua inversa.

10. A partir de uma tabela: uma função f é definida por $f = \{(1, 3), (2, 5), (4, 9)\}$. Escreve f^{-1} e indica o seu domínio e contradomínio.

11. Justificação: explica por que razão o domínio de f^{-1} é o contradomínio de f e por que razão $f(x) = x^2$ não é invertível em $\mathbb{R}$, mas é invertível se considerarmos apenas $x \geq 0$.

12. (Python) O programa seguinte verifica que a inversa de $f(x) = 2x + 3$ é $f^{-1}(x) = (x - 3)/2$, para três valores de x . Executa-o e indica exatamente o que é impresso, explicando o que cada linha mostra.

```
def f(x):
    return 2 * x + 3

def f_inv(x):
    return (x - 3) / 2

for x in (0, 1, 5):
    y = f(x)
    print(y, '->', f_inv(y), '| volta a', f_inv(f(x)))
```

Dica: para determinar uma inversa, escreve $y = f(x)$, **troca x com y** e resolve em ordem a y . Confirma sempre o resultado com o teste $f(f^{-1}(x)) = x$ — é a verificação que apanha os erros de álgebra e, ao mesmo tempo, mostra se o domínio considerado era o adequado.

Soluções — Funções invertíveis e inversa

1. a) $f(x) = x^2$ **não** é invertível em $\mathbb{R}$: a parábola é simétrica e qualquer reta horizontal $y = k$, com $k > 0$, corta-a em dois pontos · b) $g(x) = x^3$ **é** invertível: é estritamente crescente e qualquer reta horizontal corta a curva num único ponto · c) $h(x) = |x|$ **não** é invertível: é simétrica e a reta $y = 1$, por exemplo, corta-a em dois pontos $(-1, 1)$ e $(1, 1)$ · d) $t(x) = 2^x$ **é** invertível: é estritamente crescente e cada reta horizontal a corta no máximo uma vez.

2. Supondo $f(a) = f(b)$ vem $2a + 3 = 2b + 3$. Subtraindo 3 a ambos os membros: $2a = 2b$ e, dividindo por 2, **$a = b$** . Logo a função é injetiva (e, como o contradomínio é $\mathbb{R}$, é também sobrejetiva, portanto invertível).

3. Tomando $a = 0$ e $b = 4$: $g(0) = 0^2 - 4 \times 0 = 0$ e $g(4) = 4^2 - 4 \times 4 = 16 - 16 = 0$. Como $g(0) = g(4) = 0$ com $0 \neq 4$, a função **não é injetiva** em $\mathbb{R}$. O vértice da parábola está em $x = 2$ (eixo de simetria), onde $g(2) = 4 - 8 = -4$. Restringindo o domínio a **$[2, +\infty[$** a função passa a ser estritamente crescente — e portanto injetiva — porque se considera apenas um dos ramos da parábola.

4. De $y = 2x + 3$ tira-se $2x = y - 3$ e $x = (y - 3)/2$, logo **$f^{-1}(x) = (x - 3)/2$** . Verificações: $f(f^{-1}(x)) = 2 \times (x - 3)/2 + 3 = (x - 3) + 3 = x$ ✓ e $f^{-1}(f(x)) = ((2x + 3) - 3)/2 = 2x/2 = x$ ✓

5. A inversa é **$f^{-1}(x) = \log_3 x$** . Para f : $D = \mathbb{R}$ e contradomínio $]0, +\infty[$ (a exponencial só toma valores positivos). Para f^{-1} : domínio **$]0, +\infty[$** e contradomínio $\mathbb{R}$ — exatamente os conjuntos trocados, como é próprio de um par de funções inversas.

6. A inversa da função cúbica é a raiz cúbica: **$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$** . Então $f^{-1}(8) = 2$ (porque $2^3 = 8$), $f^{-1}(27) = 3$ ($3^3 = 27$) e $f^{-1}(0) = 0$ ($0^3 = 0$).

7. Se $f(x) = 1/x$, então $f(f(x)) = 1/(1/x) = x$, e o domínio mantém-se $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Como a composição da função com ela própria devolve x , conclui-se que **$f^{-1} = f$** : a hipérbole é simétrica em relação à reta $y = x$, pelo que coincide com o gráfico da sua inversa.

8. Como o domínio e o contradomínio trocam de papel entre f e f^{-1} , o domínio de f^{-1} é **$[3, +\infty[$** e o contradomínio é **$[0, +\infty[$** . A justificação é direta: f^{-1} aceita como objetos os valores que f produzia (o contradomínio de f) e devolve os objetos iniciais (o domínio de f).

9. Se (a, b) pertence ao gráfico de f , então $f(a) = b$, donde $f^{-1}(b) = a$ — ou seja, **(b, a)** pertence ao gráfico de f^{-1} . Trocar as coordenadas de um ponto corresponde a refleti-lo na reta $y = x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares), e é por isso que os dois gráficos são simétricos em relação a essa reta. No caso concreto: $2^3 = 8$, portanto $(3, 8)$ pertence ao gráfico de $f(x) = 2^x$; e $\log_2 8 = 3$, portanto **$(8, 3)$** pertence ao gráfico de $f^{-1}(x) = \log_2 x$ — exatamente as coordenadas trocadas.

10. A inversa obtém-se trocando as coordenadas de cada par: **$f^{-1} = \{(3, 1), (5, 2), (9, 4)\}$** . O domínio de f^{-1} é **$\{3, 5, 9\}$** (que era o contradomínio de f) e o contradomínio é **$\{1, 2, 4\}$** (que era o domínio de f).

11. A função inversa recebe como objetos os valores que a função original produz e devolve os objetos que os originaram: assim, o que era **saída** de f passa a ser **entrada** de f^{-1} , e o que era entrada de f passa a ser saída de f^{-1} . Quanto à segunda parte: em $\mathbb{R}$ a parábola $y = x^2$ associa a dois valores distintos (por exemplo -2 e 2) a mesma imagem 4 , pelo que não é injetiva e não pode ser invertida — não se saberia para que objeto devolver 4 . Restringindo a **$x \geq 0$** fica-se apenas com o ramo direito, que é estritamente crescente, logo injetivo, e a inversa é exatamente $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, como se usa na definição de raiz quadrada.

12. O programa imprime: **$3 \rightarrow 0.0$ | volta a $0.0 \cdot 5 \rightarrow 1.0$ | volta a $1.0 \cdot 13 \rightarrow 5.0$ | volta a 5.0** . Em cada linha, o primeiro valor é $f(x)$ (para $x = 0, 1$ e 5 obtêm-se $3, 5$ e 13), o segundo é f^{-1} desse valor (que devolve exatamente o x de partida) e o terceiro volta a aplicar f^{-1} a $f(x)$, comprovando a igualdade **$f^{-1}(f(x)) = x$** nos três casos. Os resultados coincidem com a verificação algébrica da questão 4.

Nota: a existência de inversa depende sempre do **domínio considerado** — não é uma propriedade da «fórmula», mas da função com o seu domínio. É por isso que $y = x^2$ não tem inversa em $\mathbb{R}$ e tem inversa em $[0, +\infty[$.