

Ficha 1 — Função exponencial

12.º Ano

Matemática A

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: aplicar as propriedades operatórias das potências, reconhecer a monotonia de uma função exponencial, estudar $f(x) = b \cdot a^{x-c} + d$ (domínio, contradomínio, interseções, monotonia e comportamento no infinito) e resolver equações exponenciais, analítica e graficamente.

Revisão rápida — função exponencial

- **Função exponencial:** $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$. O domínio é $\mathbb{R}$ e $a^x > 0$ para todo o x , pelo que o contradomínio é $]0, +\infty[$.
- **Monotonia:** se $a > 1$ a função é **crecente**; se $0 < a < 1$ é **decrecente**. O gráfico passa sempre por $(0, 1)$, porque $a^0 = 1$, e tem a assíntota $y = 0$.
- **Propriedades operatórias:** $a^m \times a^n = a^{m+n}$, $a^m / a^n = a^{m-n}$, $(a^m)^n = a^{m \times n}$, $(ab)^n = a^n b^n$, $a^{-n} = 1/a^n$.
- **Forma geral $f(x) = b \cdot a^{x-c} + d$** ($b \neq 0$): o domínio é $\mathbb{R}$; o contradomínio é $]d, +\infty[$ se $b > 0$ e $]-\infty, d[$ se $b < 0$; a assíntota é $y = d$. O parâmetro c desloca horizontalmente, d verticalmente e $|b|$ dilata verticalmente.
- **Interseções:** com Oy calcula-se $f(0)$; com Ox resolve-se $f(x) = 0$ (uma **equação exponencial**).
- **Equações exponenciais:** reduzem-se à forma $a^u = a^v$ para concluir $u = v$ (a função exponencial é injetiva). Quando o segundo membro não é uma potência da mesma base, resolve-se **graficamente**, contando as interseções das duas curvas.
- **Modelação:** crescimento exponencial usa fatores $a > 1$ (populações, juros); decréscimo usa $0 < a < 1$ (desvalorização, decaimento).

Exercícios

1. Propriedades operatórias: simplifica, apresentando o resultado como potência e como número: a) $2^3 \times 2^5 \cdot b) (3^2)^3 \cdot c) 5^7 / 5^4 \cdot d) (2 \times 5)^3$.

2. Monotonia: indica se cada função é crescente ou decréscimo e justifica: a) $f(x) = 3^x \cdot b) g(x) = (1/2)^x \cdot c) h(x) = 0,7^x$.

3. Valores: para $f(x) = 2^x$, calcula $f(-2)$, $f(0)$ e $f(3)$.

4. Forma $b \cdot a^{x-c} + d$: para $f(x) = 3 \times 2^{x-1} + 5$, indica o domínio, o contradomínio, a equação da assíntota e o valor de $f(0)$.

5. Interseções com os eixos: para $f(x) = 2^x - 8$, determina o zero da função e o valor de $f(0)$, indicando as coordenadas dos pontos de interseção com Ox e Oy .

6. Decrescimento: para $f(x) = 4 \times (1/3)^x + 1$, indica o contradomínio, justifica que é decrescente, calcula $f(0)$ e explica o que acontece a $f(x)$ quando x tende para $+\infty$.

7. Resolução gráfica: sem resolver analiticamente, indica quantas soluções tem a equação $2^x = x + 1$ e identifica-as, justificando com o esboço dos dois gráficos.

8. Crescimento exponencial: uma população de bactérias, inicialmente com 500 indivíduos, duplica a cada hora. Escreve a expressão de $N(t)$ e determina: a) o número de bactérias ao fim de 3 horas · b) o tempo necessário para atingir 32 000 bactérias.

9. Decrescimento exponencial: uma máquina comprada por 50 000 € desvaloriza 20% por ano, pelo que o seu valor após t anos é $V(t) = 50\,000 \times 0,8^t$. Calcula o valor da máquina ao fim de 2 anos e explica por que razão a função é decrescente.

10. Comparação de crescimentos: compara 2^x com x^2 para $x = 2, 3, 4$ e 5 e conclui em que valores de x se tem $2^x > x^2$.

11. Justificação: explica por que razão o contradomínio de $f(x) = b \cdot a^x + d$, com $b > 0$, $d \in]d, +\infty[$ e por que razão a função não tem zeros quando $d > 0$.

12. (Python) O programa seguinte determina em quantas horas uma população de 500 bactérias, que duplica a cada hora, atinge 32 000 indivíduos. Executa-o e indica exatamente o que é impresso, confirmando o resultado da questão 8 b).

```
populacao = 500
taxa = 2
t = 0

while populacao < 32000:
    populacao *= taxa
    t += 1

print('Horas necessarias:', t)
print('Populacao nesse instante:', populacao)
```

Dica: em equações exponenciais, o primeiro passo é sempre **escrever os dois membros como potências da mesma base** ($8 = 2^3$, $1/27 = 3^{-3}$, $\sqrt{2} = 2^{1/2}$). Só depois de igualar as bases se pode igualar os expoentes. Quando a base não é a mesma, o problema passa a ser gráfico — e aí conta-se o número de interseções das curvas.

Soluções — Função exponencial

1. a) $2^3 \times 2^5 = 2^{3+5} = 2^8 = 256 \cdot b) (3^2)^3 = 3^{2 \times 3} = 3^6 = 729 \cdot c) 5^7/5^4 = 5^{7-4} = 5^3 = 125 \cdot d) (2 \times 5)^3 = 2^3 \times 5^3 = 8 \times 125 = 1000 (= 10^3).$

2. a) $f(x) = 3^x$ é **crescente**, porque a base 3 é maior do que $1 \cdot b) g(x) = (1/2)^x$ é **decrecente**, porque $0 < 1/2 < 1 \cdot c) h(x) = 0,7^x$ é **decrecente**, porque $0 < 0,7 < 1$.

3. $f(-2) = 2^{-2} = 1/4 = 0,25 \cdot f(0) = 2^0 = 1 \cdot f(3) = 2^3 = 8$.

4. O domínio é $\mathbb{R}$. Como $b = 3 > 0$, o contradomínio é $]5, +\infty[$ e a assíntota é a reta $y = 5$. $f(0) = 3 \times 2^{-1} + 5 = 3/2 + 5 = 6,5$. Quando $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow +\infty$; quando $x \rightarrow -\infty$, $2^{x-1} \rightarrow 0$ e $f(x) \rightarrow 5$, aproximando-se da assíntota sem a atingir.

5. Zero de f : $2^x - 8 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 8 = 2^3 \Leftrightarrow x = 3$. Interseção com Ox : $(3, 0)$. $f(0) = 2^0 - 8 = 1 - 8 = -7$, logo a interseção com Oy é $(0, -7)$.

6. O contradomínio é $]1, +\infty[$ ($b = 4 > 0$ e $d = 1$). A função é **decrecente** porque a base $1/3$ está entre 0 e 1, e a multiplicação por 4 e a soma de 1 não alteram a monotonia. $f(0) = 4 \times 1 + 1 = 5$. Quando $x \rightarrow +\infty$, $(1/3)^x \rightarrow 0$, pelo que $f(x) \rightarrow 1$: a reta $y = 1$ é **assíntota horizontal** e a curva aproxima-se dela por cima.

7. Esboçando $y = 2^x$ (curva exponencial passando em $(0, 1)$) e $y = x + 1$ (reta de declive 1 que passa em $(0, 1)$ e $(-1, 0)$), verifica-se que se intersectam **exatamente duas vezes**, ambas em pontos de abcissa inteira: $x = 0$ ($2^0 = 1 = 0 + 1$) e $x = 1$ ($2^1 = 2 = 1 + 1$). Para x entre 0 e 1 a exponencial está abaixo da reta, e para $x > 1$ volta a ficar acima — daí as duas interseções e nenhuma outra.

8. $N(t) = 500 \times 2^t$. a) $N(3) = 500 \times 8 = 4\,000$ bactérias. b) $500 \times 2^t = 32\,000 \Leftrightarrow 2^t = 64 = 2^6 \Leftrightarrow t = 6$ horas.

9. $V(2) = 50\,000 \times 0,8^2 = 50\,000 \times 0,64 = 32\,000$ €. A função é decrescente porque a base 0,8 está entre 0 e 1: cada ano o valor é multiplicado por um fator inferior a 1, o que corresponde a uma redução de 20% ao ano.

10. $x = 2$: $2^2 = 4$ e $2^2 = 4 \rightarrow$ são **iguais**. $x = 3$: $2^3 = 8$ e $3^2 = 9 \rightarrow x^2$ é **maior**. $x = 4$: $2^4 = 16$ e $4^2 = 16 \rightarrow$ são **iguais**. $x = 5$: $2^5 = 32$ e $5^2 = 25 \rightarrow 2^x$ é **maior**. Conclui-se que $2^x > x^2$ para $x > 4$ (e também para $0 \leq x < 2$), sendo as duas curvas iguais em $x = 2$ e $x = 4$. A partir de $x = 4$ o crescimento exponencial ultrapassa definitivamente o crescimento quadrático.

11. Como $a^x > 0$ para todo o x real, tem-se $b \cdot a^x > 0$ quando $b > 0$, e somando d obtém-se $f(x) > d$ — mas $f(x)$ pode aproximar-se de d tanto quanto se queira (quando $x \rightarrow -\infty$ se $a > 1$, ou quando $x \rightarrow +\infty$ se $0 < a < 1$). Logo o contradomínio é $]d, +\infty[$. Quanto aos zeros: um zero exigiria $f(x) = 0$, isto é $b \cdot a^x = -d$; com $b > 0$ o primeiro membro é sempre positivo e, se $d > 0$, o segundo membro é negativo — uma igualdade impossível. É por isso que a função **não tem zeros** e o gráfico fica inteiramente acima do eixo Ox .

12. O programa imprime: **Horas necessarias: 6 e Populacao nesse instante: 32000**. Parte de 500 indivíduos e vai multiplicando por 2 até atingir (ou ultrapassar) 32 000: os valores sucessivos são 1 000, 2 000, 4 000, 8 000, 16 000 e 32 000, o que corresponde a **6 multiplicações**, em concordância com o resultado analítico $2^t = 64 \Leftrightarrow t = 6$ da questão 8 b).

Nota: ao estudar uma exponencial da forma $b \cdot a^{x-c} + d$, começa sempre por identificar os **dois deslocamentos**: d dá a assíntota e o contradomínio, c dá o deslocamento horizontal (o gráfico passa em $(c, b + d)$ em vez de $(0, 1)$).