

Ficha 5 — Função composta

12.º Ano Matemática A 4 páginas 12 exercícios

Objetivo: determinar expressões de funções compostas, mostrar que a composição não é comutativa, calcular domínios de funções compostas impondo as condições de cada função, decompor funções em funções mais simples e reconhecer a composta de funções inversas.

Revisão rápida — função composta

- **Definição:** $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Aplica-se primeiro a função que está **mais próxima do x** (g) e só depois f ao resultado obtido.
- **A composição não é comutativa:** em geral $f \circ g \neq g \circ f$. Basta um exemplo para o mostrar.
- **Domínio da composta:** x tem de pertencer ao domínio de g e g(x) tem de pertencer ao domínio de f. É por isso que o domínio da composta pode ser mais pequeno do que o domínio de g.
- **Regras práticas:** se f contém uma raiz de índice par, exige-se $g(x) \geq 0$; se f contém um logaritmo, exige-se $g(x) > 0$; se f tem um denominador, exige-se $g(x) \neq 0$ (ou o denominador da própria g não nulo).
- **Decomposição:** escrever h como composta é identificar a «função de fora» e a «função de dentro». Exemplo: $h(x) = (3x - 2)^5$ é $f \circ g$ com $g(x) = 3x - 2$ e $f(u) = u^5$.
- **Funções inversas:** se f e g são inversas uma da outra, então $f(g(x)) = x$ no domínio de g e $g(f(x)) = x$ no domínio de f — a composta devolve o objeto inicial.

Exercícios

1. Cálculo e não comutatividade: para $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x^2$, determina $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$, calcula as duas em $x = 3$ e mostra que a composição não é comutativa.

2. Domínio com raiz: para $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x - 4$, determina a expressão e o domínio de $f \circ g$ e calcula $(f \circ g)(4)$.

3. Domínio com denominador: para $f(x) = 1/x$ e $g(x) = x + 2$, determina $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$ e indica o domínio de cada uma.

4. Composta com logaritmo: para $f(x) = \ln x$ e $g(x) = x^2 + 1$, determina $(f \circ g)(x)$, mostra que o seu domínio é $\mathbb{R}$ e calcula $(f \circ g)(0)$.

5. Composta de inversas: para $f(x) = e^x$ e $g(x) = \ln x$, calcula $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$ e explica o resultado, indicando os domínios onde cada igualdade é válida.

6. Composição de três funções: para $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$ e $h(x) = 2x$, determina a expressão de $(f \circ g \circ h)(x)$ e calcula o seu valor em $x = 2$.

7. Duas condições: para $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 1/(x - 1)$, determina a expressão e o domínio de $(f \circ g)(x)$ e explica por que razão $x = 0,5$ não pertence ao domínio.

8. A partir de tabelas: as funções $f = \{(1, 3), (2, 5), (3, 7)\}$ e $g = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ estão definidas por tabelas. Calcula $(f \circ g)(1)$, $(f \circ g)(2)$, $(f \circ g)(3)$ e $(g \circ f)(1)$.

9. Decomposição: escreve cada função como composta de duas funções mais simples, indicando a «função de fora» e a «função de dentro»: a) $h(x) = (3x - 2)^5 \cdot b$
 $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

10. O domínio importa: para $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$, calcula $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$ e explica por que razão os dois resultados não são iguais para todo o x real.

11. Justificação: explica o que é preciso verificar para determinar o domínio de uma função composta $f \circ g$ e indica, com um exemplo, uma situação em que o domínio da composta é mais pequeno do que o domínio de g .

12. (Python) O programa seguinte calcula duas composições das mesmas funções no mesmo ponto, em ordens diferentes. Executa-o e indica exatamente o que é impresso, explicando o que os dois valores mostram.

```
def f(x):
    return 2 * x + 1

def g(x):
    return x ** 2

x = 3
print('f(g(x)):', f(g(x)))
print('g(f(x)):', g(f(x)))
```

Dica: ao compor, escreve sempre **g(x) dentro de f** e simplifica antes de pensar no domínio. No fim, pergunta-te: «que valores de x fazem a função de dentro valer o que a de fora exige?» — é essa a única pergunta que determina o domínio da composta.

Soluções — Função composta

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 + 1$ e $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$. Em $x = 3$: $(f \circ g)(3) = f(9) = 19$ e $(g \circ f)(3) = g(7) = 49$. Como $19 \neq 49$, conclui-se que a composição **não é comutativa** — a ordem das funções altera o resultado (a diferença também já se nota em $x = 1$, onde os valores são 3 e 9).
 - $(f \circ g)(x) = f(x - 4) = \sqrt{x - 4}$. Exige-se $x - 4 \geq 0$, logo $D = [4, +\infty[$. Além disso, $(f \circ g)(4) = \sqrt{0} = 0$.
 - $(f \circ g)(x) = f(x + 2) = \frac{1}{x + 2}$, com $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ (anula-se o denominador em $x = -2$) · $(g \circ f)(x) = g(1/x) = \frac{1}{x} + 2$, com $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (a função de dentro não existe em $x = 0$). Repare-se que os domínios são diferentes, apesar de as funções serem as mesmas.
 - $(f \circ g)(x) = \ln(x^2 + 1)$. Como $x^2 \geq 0$, tem-se $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ para todo o x real, pelo que o argumento do logaritmo é sempre positivo e o domínio é $\mathbb{R}$. Além disso, $(f \circ g)(0) = \ln(0 + 1) = \ln 1 = 0$.
 - $(f \circ g)(x) = e^{\ln x} = x$, válida para $x > 0$ (o domínio de g) · $(g \circ f)(x) = \ln(e^x) = x$, válida para **todo o x real** (o domínio de f). O resultado era esperado porque a exponencial e o logaritmo são **funções inversas** uma da outra: compô-las devolve sempre o objeto de partida, apenas com o cuidado de respeitar o domínio da função de dentro.
 - $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) = f(g(2x)) = f(2x + 1) = (2x + 1)^2$. Em $x = 2$: $(2 \times 2 + 1)^2 = 5^2 = 25$.
 - $(f \circ g)(x) = f(1/(x - 1)) = \sqrt{1/(x - 1)}$. Impõem-se duas condições: primeiro, o denominador da função de dentro não pode anular-se, logo $x \neq 1$; segundo, o que sai de g tem de ser aceitável para f (raiz de índice par), logo $1/(x - 1) \geq 0$, o que exige $x > 1$. O domínio é, por isso, $]1, +\infty[$. O valor $x = 0,5$ não pertence ao domínio porque aí $1/(0,5 - 1) = -2 < 0$, e a raiz quadrada de um número negativo não existe em $\mathbb{R}$.
 - Pela definição $(f \circ g)(x) = f(g(x))$: $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(2) = 5$ · $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(3) = 7$ · $(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(1) = 3$. Na ordem inversa, $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(3) = 1$.
 - a) A função de dentro é $g(x) = 3x - 2$ e a de fora é $f(u) = u^5$, porque $f(g(x)) = (3x - 2)^5 \checkmark$ · b) A função de dentro é $g(x) = x^2 + 1$ e a de fora é $f(u) = \sqrt{u}$, porque $f(g(x)) = \sqrt{x^2 + 1} \checkmark$ (esta decomposição é a chave para, mais tarde, aplicar a regra da cadeia.)
 - $(f \circ g)(x) = (\sqrt{x})^2 = x$, mas apenas para $x \geq 0$ (o domínio de g , que é a função de dentro) — para $x < 0$ a expressão não tem significado. Já $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2} = |x|$, definida para todo o x real. Os resultados diferem porque, em $(g \circ f)$, a função de dentro (o quadrado) transforma números negativos em positivos antes de a raiz atuar, e a informação do sinal perde-se — daí o módulo. É um bom exemplo de que **o domínio da composta é sempre um subconjunto do domínio da função de dentro**.
 - Para determinar o domínio de $f \circ g$ é preciso: (i) garantir que x pertence ao domínio de g ; (ii) garantir que $g(x)$ pertence ao domínio de f — isto é, que $g(x) \geq 0$ quando f tem raiz de índice par, que $g(x) > 0$ quando f tem logaritmo e que $g(x) \neq 0$ quando f tem esse valor no denominador; (iii) interseção todas as condições obtidas. Exemplo em que o domínio **encolhe**: com $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x - 4$, o domínio de g é $\mathbb{R}$, mas o domínio de $f \circ g$ é apenas $[4, +\infty[$, porque é preciso que $x - 4 \geq 0$.
 - O programa imprime: **$f(g(x))$: 19 e $g(f(x))$: 49**. Em $x = 3$, a primeira linha calcula $f(g(3))$: a função de dentro eleva 3 ao quadrado (dá 9) e a de fora duplica e soma 1 (dá 19). A segunda calcula $g(f(3))$: a função de dentro duplica 3 e soma 1 (dá 7) e a de fora eleva ao quadrado (dá 49). Os dois valores, 19 e 49, são diferentes — é exatamente a demonstração numérica de que **$f \circ g \neq g \circ f$** , confirmando a questão 1.
- Nota:** ao calcular uma composta em papel, nunca simplifique antes de verificar o domínio. A simplificação $(\sqrt{x})^2 \rightarrow x$ esconde a condição $x \geq 0$, e é essa condição que distingue a resposta certa da errada.