

Simulação de Exame de Matemática — Probabilidade (12.º Ano)

10 questões 20 valores 3 páginas Formato exame

Instruções: responde a todas as questões apresentando os cálculos e as justificações. Cada questão vale 2 valores. No Grupo I indica apenas a opção correta. As soluções encontram-se na página 3.

Grupo I — Escolha múltipla

1. (2 valores) Lançam-se dois dados equilibrados e somam-se os pontos obtidos. A probabilidade de a soma ser 7 é:

- (A) 1/12 (B) 1/6 (C) 7/36 (D) 1/9

2. (2 valores) Numa urna existem 5 bolas brancas e 3 bolas pretas. Extraem-se duas bolas, ao acaso e sem reposição. A probabilidade de ambas serem brancas é:

- (A) 25/64 (B) 5/8 (C) 5/14 (D) 10/28

3. (2 valores) Sejam A e B acontecimentos tais que $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,5$ e $P(A \cap B) = 0,3$. Então $P(A \cup B)$ é:

- (A) 1,1 (B) 0,3 (C) 0,9 (D) 0,8

4. (2 valores) Se $P(A) = 0,4$ e $P(B | A) = 0,5$, então $P(A \cap B)$ é:

- (A) 0,2 (B) 0,9 (C) 0,45 (D) 0,8

Grupo II — Resposta aberta

5. (2 valores) Uma variável aleatória X toma os valores 0, 1 e 2 com probabilidades 0,2, 0,5 e 0,3, respetivamente. Determina o valor médio $E(X)$ e o desvio padrão σ .

6. (2 valores) Sejam A e B acontecimentos independentes com $P(A) = 0,4$ e $P(B) = 0,5$. Determina $P(A \cap B)$ e $P(A \cup B)$, justificando.

7. (2 valores) Numa turma, 60% dos alunos são raparigas. Praticam desporto 30% das raparigas e 50% dos rapazes. Escolhido um aluno ao acaso, determina a probabilidade de praticar desporto.

8. (2 valores) Um teste diagnóstico tem sensibilidade 0,95 e especificidade 0,90. A prevalência da doença na população é 0,02. Determina a probabilidade de uma pessoa cujo resultado é positivo estar realmente doente e comenta o valor obtido.

9. (2 valores) Um dado equilibrado é lançado quatro vezes. Determina a probabilidade de sair pelo menos um 6.

10. (2 valores) A variável aleatória X segue uma distribuição normal de desvio padrão $\sigma = 2$. Sabendo que $P(X < 10) = 0,9772$, determina o valor médio μ .

Soluções — Simulação de Exame: Probabilidade

- O espaço de resultados tem $6 \times 6 = 36$ casos igualmente prováveis. As somas iguais a 7 correspondem a (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2) e (6, 1) — 6 casos. Logo $P = 6/36 = 1/6 \rightarrow$ opção **(B)**. Note-se que $7/36$ seria o número de casos (6) dividido por um denominador errado, e $1/12$ resultaria de contar apenas 3 casos.
 - $P(1.ª \text{ branca}) = 5/8$. Retirada uma bola branca, ficam 4 brancas em 7 bolas, pelo que $P(2.ª \text{ branca} \mid 1.ª \text{ branca}) = 4/7$. Assim $P = (5/8) \times (4/7) = 20/56 = 5/14 \rightarrow$ opção **(C)**. A opção $25/64$ seria o resultado errado de considerar as extrações *com* reposição ($5/8 \times 5/8$).
 - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,5 - 0,3 = 0,8 \rightarrow$ opção **(D)**. A opção 1,1 resulta de somar sem subtrair a interseção — impossível, pois uma probabilidade nunca excede 1.
 - Da definição de probabilidade condicionada, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B \mid A) = 0,4 \times 0,5 = 0,2 \rightarrow$ opção **(A)**. Não se pode confundir $P(B \mid A)$ com $P(A \cap B)$: a primeira é uma probabilidade condicionada, a segunda a probabilidade da interseção.
 - $E(X) = 0 \times 0,2 + 1 \times 0,5 + 2 \times 0,3 = 0 + 0,5 + 0,6 = 1,1$. Para a variância, $E(X^2) = 0^2 \times 0,2 + 1^2 \times 0,5 + 2^2 \times 0,3 = 0 + 0,5 + 1,2 = 1,7$, pelo que $\text{Var}(X) = 1,7 - 1,1^2 = 1,7 - 1,21 = 0,49$. Logo $\sigma = \sqrt{0,49} = 0,7$. Repare-se que $E(X^2) \neq (E(X))^2$: a variância mede a dispersão e não é nula porque os valores de X não são todos iguais.
 - Sendo A e B **independentes**, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,4 \times 0,5 = 0,2$. Então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4 + 0,5 - 0,2 = 0,7$. A justificação da independência é essencial: sem ela, $P(A \cap B)$ não ficaria determinada pelos dados (poderia tomar qualquer valor entre 0 e 0,4, já que $P(A) + P(B) - 1 = -0,1$ é negativo e o mínimo admissível é 0).
 - Aplicando o teorema da probabilidade total, com os acontecimentos R (rapariga) e D (praticar desporto): $P(D) = P(R) \cdot P(D \mid R) + P(\bar{R}) \cdot P(D \mid \bar{R}) = 0,6 \times 0,3 + 0,4 \times 0,5 = 0,18 + 0,20 = 0,38$. Ou seja, 38% dos alunos da turma praticam desporto. A média simples das duas percentagens (0,3 e 0,5, dando 0,4) seria incorreta, porque os dois grupos têm dimensões diferentes.
 - Sejam D (doente) e $+$ (resultado positivo). $P(D) = 0,02$, $P(+ \mid D) = 0,95$ e $P(+ \mid \bar{D}) = 1 - 0,90 = 0,10$. $P(+) = 0,02 \times 0,95 + 0,98 \times 0,10 = 0,019 + 0,098 = 0,117$. Então $P(D \mid +) = 0,019 / 0,117 \approx 0,162$, isto é, cerca de **16,2%**. Comentário: apesar de o teste ter elevada sensibilidade, a probabilidade de estar doente dado um resultado positivo é baixa — porque a doença é rara (prevalência 2%) e a maior parte dos positivos provém dos falsos positivos (0,098 contra 0,019). É o efeito típico da prevalência baixa.
 - É mais simples recorrer ao acontecimento contrário: a probabilidade de **não** sair 6 num lançamento é $5/6$, pelo que a de não sair 6 em quatro lançamentos é $(5/6)^4 = 625/1296$. Logo $P(\text{pelo menos um } 6) = 1 - 625/1296 = 671/1296 \approx 0,5177$. O resultado faz sentido: com quatro lançamentos é ligeiramente mais provável sair pelo menos um 6 do que não sair nenhum. Não se pode simplesmente somar $4 \times 1/6$, porque os acontecimentos «sair 6» nos vários lançamentos não são disjuntos.
 - Standardizando: $P(X < 10) = P(Z < (10 - \mu)/2) = 0,9772$. Como $\Phi(2) = 0,9772$, vem $(10 - \mu)/2 = 2$, donde $10 - \mu = 4$ e $\mu = 6$. Verificação: $P(X < 10) = \Phi((10 - 6)/2) = \Phi(2) = 0,9772 \checkmark$. O valor médio está assim 2 desvios padrão abaixo do valor dado — coerente com $P(X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9772$.
- Nota:** identifica primeiro o **tipo** de problema (probabilidade condicionada, independência, probabilidade total, contagem complementar ou normal) — cada um tem um método próprio, e confundi-los é a origem mais comum de erro.