

Simulação de Exame de Matemática — Prova Global (12.º Ano)

10 questões 20 valores 3 páginas Duas partes

Instruções: a prova tem duas partes. Na **Parte I** não é permitido usar calculadora; na **Parte II** a calculadora é permitida. Cada questão vale 2 valores. Apresenta sempre os cálculos e as justificações. As soluções encontram-se na página 3.

Parte I — Sem calculadora

1. (2 valores) Escreve na forma algébrica o número complexo $(1 - i)^2$.

2. (2 valores) Sejam A e B acontecimentos independentes, com $P(A) = 0,5$ e $P(B) = 0,4$. Determina $P(A \cup B)$.

3. (2 valores) Determina a expressão da derivada de $f(x) = 3x^4 - 2x + 7$.

4. (2 valores) Considera $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Calcula A^2 .

5. (2 valores) Determina uma primitiva da função $f(x) = 4x^3 - 2/x$, definida para $x > 0$, e verifica o resultado por derivação.

Parte II — Com calculadora

6. (2 valores) Determina o máximo relativo da função $f(x) = x e^{-x}$, indicando as coordenadas do ponto e o valor arredondado às milésimas.

7. (2 valores) A variável aleatória X segue uma distribuição normal de valor médio 50 e desvio padrão 10. Determina $P(X > 65)$, com quatro casas decimais.

8. (2 valores) Sendo $z = 2 (\cos \pi/3 + i \sin \pi/3)$, determina z^3 na forma algébrica.

9. (2 valores) Resolve em $\mathbb{R}$ a equação $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$, apresentando as soluções na forma exata e com quatro casas decimais.

10. (2 valores) Calcula o integral definido $\int_1^e (1/x) dx$, justificando com o Teorema Fundamental do Cálculo.

Soluções — Simulação de Exame: Prova Global

- $(1 - i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$. Recorde-se que $i^2 = -1$, pelo que o termo i^2 vale -1 e cancela o 1 inicial. O resultado é um imaginário puro, de parte real nula.
 - Sendo A e B independentes, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,5 \times 0,4 = 0,2$. Logo $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5 + 0,4 - 0,2 = 0,7$. Sem a hipótese de independência, o valor de $P(A \cap B)$ não ficaria determinado pelos dados.
 - Derivando termo a termo: $f'(x) = 3 \times 4x^3 - 2 = 12x^3 - 2$. A derivada da constante 7 é 0. Verificação numérica em $x = 2$: $f'(2) = 12 \times 8 - 2 = 94$, valor que coincide com a derivada numérica.
 - $A^2 = [2 \ 0; 1 \ 3] \cdot [2 \ 0; 1 \ 3]$. Pela regra linha $\times$ coluna: elemento $(1,1) = 2 \times 2 + 0 \times 1 = 4$; $(1,2) = 2 \times 0 + 0 \times 3 = 0$; $(2,1) = 1 \times 2 + 3 \times 1 = 5$; $(2,2) = 1 \times 0 + 3 \times 3 = 9$. Logo $A^2 = [4 \ 0; 5 \ 9]$.
 - Primitivando termo a termo: $\int (4x^3 - 2/x) \, dx = x^4 - 2 \ln x + C$ (para $x > 0$). Verificação por derivação: a derivada de x^4 é $4x^3$ e a de $2 \ln x$ é $2/x$, pelo que $(x^4 - 2 \ln x)' = 4x^3 - 2/x$ ✓ — obtém-se exatamente a função inicial, como exige a definição de primitiva. Confirmação numérica em $x = 2$: $4 \times 8 - 2/2 = 31$, que coincide com a derivada numérica.
 - $f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = e^{-x}(1 - x)$, pela regra do produto. Como $e^{-x} > 0$ para todo o x , o sinal de f' depende de $(1 - x)$: $f' > 0$ para $x < 1$ e $f' < 0$ para $x > 1$. Logo $x = 1$ é um **máximo relativo**, com $f(1) = 1 \times e^{-1} = 1/e \approx 0,368$. O ponto é $(1; 0,368)$. Não há mínimo relativo, pois f' só se anula uma vez; a função tende para 0 quando $x \rightarrow +\infty$.
 - Standardizando: $z = (65 - 50)/10 = 1,5$. Logo $P(X > 65) = 1 - \Phi(1,5)$. Da tabela da normal padrão, $\Phi(1,5) = 0,93319$, pelo que $P(X > 65) = 1 - 0,93319 = 0,0668$ (aproximadamente 6,68%). Recorde-se que a distribuição normal é simétrica: $P(X < 35)$ tem o mesmo valor, e $P(35 < X < 65) = 2\Phi(1,5) - 1 \approx 0,8664$.
 - Pela fórmula de De Moivre, $z^3 = 2^3 [\cos(3 \times \pi/3) + i \sin(3 \times \pi/3)] = 8 (\cos \pi + i \sin \pi) = 8(-1 + 0i) = -8$. O resultado é um número real negativo, o que faz sentido: rodar três vezes um ângulo de $\pi/3$ dá uma rotação total de π , e o módulo eleva-se ao cubo ($2^3 = 8$).
 - Fazendo a substituição $u = e^x$ ($u > 0$), obtém-se $u^2 - 3u + 2 = 0$, cujas soluções são $u = 1$ e $u = 2$. Como o discriminante $9 - 8 = 1$ é positivo, ambas são admissíveis. Resolvendo em x : $e^x = 1$ dá $x = 0$; $e^x = 2$ dá $x = \ln 2 \approx 0,6931$. Verificação: para $x = \ln 2$, $e^{2x} = 4$ e $3e^x = 6$, pelo que $4 - 6 + 2 = 0$ ✓. A substituição é essencial: sem ela tratar-se-ia uma equação exponencial como se fosse polinomial.
 - Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, uma primitiva de $1/x$ em $]0, +\infty[$ é $\ln x$. Logo $\int_1^e (1/x) \, dx = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$. O resultado é independente da primitiva escolhida, pois qualquer outra difere de $\ln x$ por uma constante, que se cancela na diferença $F(b) - F(a)$. Geometricamente, a área da região entre a hipérbole $y = 1/x$, o eixo Ox e as retas $x = 1$ e $x = e$ vale exatamente 1 unidade de área.
- Nota:** esta prova global cruza os três temas do 12.º ano — complexos, probabilidade e funções — e ainda as primitivas e as matrizes dos temas opcionais. Antes de responder, identifica a que tema pertence cada questão: é o primeiro passo para escolher o método correto.