

Simulação de Exame de Matemática — Funções (12.º Ano)

10 questões 20 valores 3 páginas Formato exame

Instruções: responde a todas as questões apresentando os cálculos e as justificações. Cada questão vale 2 valores. No Grupo I indica apenas a opção correta. As soluções encontram-se na página 3.

Grupo I — Escolha múltipla

1. (2 valores) A função $f(x) = e^x - x$ tem um extremo em:
(A) $x = 1$ (B) $x = 0$ (C) $x = -1$ (D) não tem extremos

2. (2 valores) O valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 5x + 1)/(x^2 + 2)$ é:
(A) 0 (B) 1 (C) $+\infty$ (D) 3

3. (2 valores) A derivada da função $f(x) = x \cdot \ln x$, para $x > 0$, é:
(A) $1/x$ (B) $\ln x$ (C) $\ln x + 1$ (D) $x + \ln x$

4. (2 valores) A função $f(x) = x^3 - 3x$ é estritamente crescente em:
(A) $] -1, 1[$ (B) $] -\infty, -1[\cup] 1, +\infty[$ (C) $\mathbb{R}$ (D) $] 0, +\infty[$

Grupo II — Resposta aberta

5. (2 valores) Determina a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto de abcissa 2.

6. (2 valores) Estuda a monotonia da função $f(x) = x^3 - 3x$, indicando os extremos relativos e os respetivos valores.

7. (2 valores) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)/x$, justificando o resultado.

8. (2 valores) Determina a expressão da derivada de $f(x) = (x^2 + 1)/(x - 1)$, para $x \neq 1$.

9. (2 valores) Uma população de bactérias evolui segundo $P(t) = 500 e^{0.2t}$, com t em horas. Determina $P(5)$ e a taxa de crescimento instantânea nesse instante, apresentando os resultados arredondados às centésimas.

10. (2 valores) Aplicando uma vez o método de Newton-Raphson, com $x_0 = 1$, à equação $x^2 - 2 = 0$, determina o valor aproximado x_1 obtido.

Soluções — Simulação de Exame: Funções

1. $f'(x) = e^x - 1$. O zero é $e^x = 1$, ou seja $x = 0$. Como $f'(x) < 0$ para $x < 0$ ($e^x < 1$) e $f'(x) > 0$ para $x > 0$, a função decresce e depois cresce: $x = 0$ é um **mínimo**, com $f(0) = 1 \checkmark \rightarrow$ opção **(B)**. Confirmação numérica: $f(0) = 1 < f(1) \approx 1,718$ e $f(0) = 1 < f(-1) \approx 1,368$.

2. Tratando-se de um quociente de polinómios do mesmo grau, o limite é o quociente dos coeficientes de maior grau: $3/1 = 3 \rightarrow$ opção **(D)**. Confirmação numérica: para $x = 1000$ obtém-se $\approx 2,995$, para $x = 10^6$ obtém-se $\approx 3,000$ — a sucessão de valores aproxima-se de 3. (Dividindo numerador e denominador por x^2 obtém-se o mesmo resultado.)

3. Pela regra do produto: $f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot (1/x) = \ln x + 1 \rightarrow$ opção **(C)**. Verificação numérica em $x = 2$: $f'(2) \approx 1,693147 = \ln 2 + 1 \checkmark$. A opção (A) é a derivada de $\ln x$ e a (B) resultaria de esquecer a derivada do fator x .

4. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$, que é positivo quando $x^2 > 1$, isto é, quando $x < -1$ ou $x > 1$. Logo f é estritamente crescente em $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\rightarrow$ opção **(B)**. No intervalo $]-1, 1[$ a derivada é negativa, pelo que aí a função é decrescente. Confirmação: $f'(-2) = 9 > 0$, $f'(0) = -3 < 0$, $f'(2) = 9 > 0$.

5. $f(2) = 2^2 = 4$, pelo que o ponto de tangência é $(2, 4)$. Como $f'(x) = 2x$, tem-se $f'(2) = 4$ (declive da tangente). Equação: $y = f(2) + f'(2)(x - 2) = 4 + 4(x - 2) = y = 4x - 4$. Verificação: a reta passa por $(2, 4)$ — $4 \times 2 - 4 = 4 \checkmark$ — e tem declive 4 $\checkmark$.

6. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$, com zeros $x = -1$ e $x = 1$. Como f' é um polinómio do segundo grau com concavidade para cima, $f' > 0$ fora de $[-1, 1]$ e $f' < 0$ dentro. Assim: f é **crescente** em $]-\infty, -1[$, **decrescente** em $]-1, 1[$ e **crescente** em $]1, +\infty[$. Há um **máximo relativo** em $x = -1$, com $f(-1) = -1 + 3 = 2$, e um **mínimo relativo** em $x = 1$, com $f(1) = 1 - 3 = -2$. A função não tem extremos absolutos, pois tende para $-\infty$ e para $+\infty$ nos extremos do domínio.

7. O limite é um caso de indeterminação $0/0$. Trata-se de um **limite notável**: $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)/x = 1$. Justificação pela regra de Cauchy (ou de L'Hôpital): derivando numerador e denominador obtém-se $\lim_{x \rightarrow 0} e^x/1 = e^0 = 1 \checkmark$. Confirmação numérica: para $x = 10^{-4}$ obtém-se $\approx 1,00005$ e para $x = 10^{-6}$ $\approx 1,0000005$.

8. Pela regra do quociente, com $u = x^2 + 1$ e $v = x - 1$: $f'(x) = [u'v - uv']/v^2 = [2x(x - 1) - (x^2 + 1)(1)]/(x - 1)^2 = (2x^2 - 2x - x^2 - 1)/(x - 1)^2 = (x^2 - 2x - 1)/(x - 1)^2$. Verificação numérica em $x = 3$: $f'(3) \approx 0,5$ pela expressão e $\approx 0,5$ pelo cálculo numérico $\checkmark$.

9. $P(5) = 500 e^{0,2 \times 5} = 500 e^1 = 500 \times 2,718282 \approx 1359,14$ bactérias. A taxa de crescimento instantânea é dada pela derivada: $P'(t) = 500 \times 0,2 e^{0,2t} = 100 e^{0,2t}$, donde $P'(5) = 100 e \approx 271,83$ bactérias por hora. Note-se que $P'(5) = 0,2 \times P(5)$: num crescimento exponencial a taxa instantânea é proporcional ao efetivo presente, com constante de proporcionalidade $0,2 \text{ h}^{-1}$.

10. Com $f(x) = x^2 - 2$ tem-se $f'(x) = 2x$. Aplicando a fórmula $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ com $x_0 = 1$: $f(1) = 1 - 2 = -1$ e $f'(1) = 2$, pelo que $x_1 = 1 - (-1)/2 = 1 + 0,5 = 1,5$. Note-se que $\sqrt{2} \approx 1,41421$, pelo que uma única iteração já reduz o erro para cerca de 0,086 — o método é muito eficiente quando o ponto de partida está próximo da raiz.

Nota: na análise de funções, o sinal da **derivada** determina a monotonia e a **segunda derivada** a concavidade. Escreve sempre o estudo do sinal antes de concluir sobre extremos.