

Simulação de Exame de Matemática — Números Complexos (12.º Ano)

10 questões 20 valores 3 páginas Formato exame

Instruções: responde a todas as questões apresentando os cálculos e as justificações. Cada questão vale 2 valores. No Grupo I indica apenas a opção correta. As soluções encontram-se na página 3.

Grupo I — Escolha múltipla

1. (2 valores) O número complexo $(2 + i)(1 - 3i)$ é igual a:

- (A) $5 + 5i$ (B) $-1 - 5i$ (C) $5 - 5i$ (D) $2 - 3i$

2. (2 valores) O módulo do número complexo $z = 3 - 4i$ é:

- (A) 7 (B) $\sqrt{7}$ (C) 25 (D) 5

3. (2 valores) A forma trigonométrica do número complexo $z = 1 + i$ é:

- (A) $2 (\cos \pi/4 + i \sin \pi/4)$ (B) $\sqrt{2} (\cos \pi/4 + i \sin \pi/4)$ (C) $\sqrt{2} (\cos \pi/2 + i \sin \pi/2)$ (D) $\sqrt{2} (\cos \pi/3 + i \sin \pi/3)$

4. (2 valores) As raízes quadradas de -16 são:

- (A) ± 4 (B) $\pm 16i$ (C) apenas $4i$ (D) $\pm 4i$

Grupo II — Resposta aberta

5. (2 valores) Considera $z = 2 - i$. Determina o conjugado de z e o seu inverso, apresentando o inverso na forma algébrica.

6. (2 valores) Resolve em $\mathbb{C}$ a equação $z^2 + 2z + 5 = 0$.

7. (2 valores) Escreve na forma algébrica o número complexo $(1 + i)^2 / i$.

8. (2 valores) Determina o módulo e o argumento principal do número complexo $z = -1 + i\sqrt{3}$ e escreve-o na forma trigonométrica.

9. (2 valores) Mostra que $z = 1 + i$ é solução da equação $z^4 = -4$, indicando o valor de z^2 .

10. (2 valores) Determina as soluções da equação $z^3 = 1$ e verifica que a sua soma é nula.

Soluções — Simulação de Exame: Números Complexos

1. $(2 + i)(1 - 3i) = 2 - 6i + i - 3i^2 = 2 - 5i + 3 = 5 - 5i \rightarrow$ opção (C). Recorde-se que $i^2 = -1$, pelo que $-3i^2 = +3$.
 2. $|z| = \sqrt{(3^2 + (-4)^2)} = \sqrt{(9 + 16)} = \sqrt{25} = 5 \rightarrow$ opção (D). Note-se que o módulo é sempre um número real não negativo: 25 é o *quadrado* do módulo, não o módulo.
 3. $|1 + i| = \sqrt{(1^2 + 1^2)} = \sqrt{2}$ e o argumento θ satisfaz $\cos \theta = 1/\sqrt{2}$ e $\sin \theta = 1/\sqrt{2}$, donde $\theta = \pi/4$. Logo $z = \sqrt{2} (\cos \pi/4 + i \sin \pi/4) \rightarrow$ opção (B).
 4. $(\pm 4i)^2 = 16i^2 = -16 \checkmark$, pelo que as raízes quadradas de -16 são $\pm 4i \rightarrow$ opção (D). A opção (A) está errada porque $(\pm 4)^2 = +16$, e a opção (C) porque uma equação do segundo grau tem sempre duas raízes (complexas, contando com a multiplicidade).
 5. O conjugado é $\bar{z} = 2 + i$ (troca-se o sinal da parte imaginária). O inverso obtém-se multiplicando numerador e denominador pelo conjugado: $1/z = (2 + i)/[(2 - i)(2 + i)] = (2 + i)/(4 + 1) = (2 + i)/5 = 0,4 + 0,2i$. O denominador é sempre o quadrado do módulo: $|z|^2 = 4 + 1 = 5$.
 6. Discriminante: $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 5 = 4 - 20 = -16$. Como $\Delta < 0$, as soluções são complexas: $z = (-2 \pm \sqrt{(-16)})/2 = (-2 \pm 4i)/2$, donde $z = -1 + 2i$ ou $z = -1 - 2i$. Trata-se de um par de complexos conjugados, como seria de esperar num polinómio de coeficientes reais.
 7. $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$. Então $(1 + i)^2/i = 2i/i = 2$. O resultado é um número real, mas não se conclui daí nada de especial: o quociente de dois complexos pode ser real.
 8. $|z| = \sqrt{((-1)^2 + (\sqrt{3})^2)} = \sqrt{(1 + 3)} = 2$. Como a parte real é negativa e a imaginária positiva, z está no 2.º quadrante. O ângulo auxiliar α verifica $\tan \alpha = \sqrt{3}/1 = \sqrt{3}$, logo $\alpha = \pi/3$; o argumento principal é $\theta = \pi - \pi/3 = 2\pi/3$. Forma trigonométrica: $z = 2 (\cos 2\pi/3 + i \sin 2\pi/3)$.
 9. $z^2 = (1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$. Então $z^4 = (z^2)^2 = (2i)^2 = 4i^2 = -4 \checkmark$. Fica assim provado que $z = 1 + i$ é solução da equação $z^4 = -4$ — o método de elevar ao quadrado duas vezes evita o cálculo direto da potência quarta.
 10. Escrevendo $1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$, as raízes cúbicas são $z = \cos(2k\pi/3) + i \sin(2k\pi/3)$, com $k = 0, 1, 2$: para $k = 0$, $z = 1$; para $k = 1$, $z = \cos 2\pi/3 + i \sin 2\pi/3 = -1/2 + i\sqrt{3}/2$; para $k = 2$, $z = \cos 4\pi/3 + i \sin 4\pi/3 = -1/2 - i\sqrt{3}/2$. Verificação da soma (partes reais: $1 - 1/2 - 1/2 = 0$; partes imaginárias: $\sqrt{3}/2 - \sqrt{3}/2 = 0$): a soma é 0 $\checkmark$. Este resultado é geral: para as n raízes n -ésimas da unidade, a soma é sempre nula e o produto é $(-1)^{n+1}$.
- Nota:** antes de usar a forma trigonométrica, confirma o **quadrante** do número complexo — o sinal das partes real e imaginária determina o argumento correto, e é aí que surgem os erros mais frequentes.