

Ficha 12 — Estudo completo de funções

12.º Ano

Matemática A

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: realizar o estudo completo de funções polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas — domínio, zeros, sinal, monotonia, extremos, concavidades, pontos de inflexão, assíntotas e comportamento no infinito — e articular o estudo analítico com a leitura do gráfico.

Revisão rápida — estudo completo de uma função

- **1. Domínio:** identificar as restrições (denominadores não nulos, raízes de índice par não negativas, argumentos de logaritmos positivos).
- **2. Zeros e sinal:** resolver $f(x) = 0$ e estudar o sinal de f para saber onde o gráfico está acima ou abaixo de Ox .
- **3. Monotonia e extremos:** calcular f' , estudar o seu sinal e localizar máximos e mínimos (onde f' muda de sinal).
- **4. Concavidades e inflexão:** calcular f'' , estudar o seu sinal e localizar pontos de inflexão (zeros de f'' com mudança de sinal).
- **5. Assíntotas:** verticais onde o limite é infinito; horizontais ou oblíquas no comportamento quando $x \rightarrow \pm\infty$.
- **6. Gráfico:** reunir toda a informação num esboço — ordenada na origem, zeros, extremos, inflexões e assíntotas — e confirmar com tecnologia gráfica.
- **Articulação com a tecnologia:** a calculadora gráfica ou o computador **sugerem** o aspeto do gráfico e ajudam a verificar resultados, mas a justificação (existência e natureza dos extremos e inflexões) exige sempre o estudo analítico das derivadas.

Exercícios

1. Função polinomial: estuda $f(x) = x^3 - 3x^2$ indicando domínio, zeros, extremos, ponto de inflexão e comportamento no infinito.

2. Polinomial com dois extremos: para $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$, determina os extremos e os seus valores.

3. Função racional: estuda $f(x) = x/(x^2 + 1)$: domínio, extremos, assíntota e pontos de inflexão.

4. Produto por exponencial: para $f(x) = x e^{-x}$, determina o máximo, o ponto de inflexão e a assíntota horizontal (seis casas decimais).

5. Logaritmo sobre x : estuda $f(x) = \ln x / x$: domínio, zero, máximo, assíntota e comportamento quando $x \rightarrow 0^+$.

6. Duas assíntotas: para $f(x) = x + 1/x$, identifica as assíntotas, os extremos e esboça o gráfico com essa informação.

7. Gaussiana: estuda $f(x) = e^{-x^2}$: máximo, pontos de inflexão (seis casas decimais) e assíntota horizontal.

8. Quadrado por exponencial: para $f(x) = x^2 e^{-x}$, determina o mínimo, o máximo e a assíntota horizontal (seis casas decimais).

9. Quarto grau: para $f(x) = x^4 - 4x^3$, determina o mínimo e os pontos de inflexão, indicando as suas coordenadas.

10. Estudo analítico e gráfico: explica de que modo o estudo analítico (derivadas) e a representação gráfica se completam, indicando o que cada um garante e o que apenas sugere.

11. Justificação: enuncia, por ordem, os passos de um estudo completo de função e explica por que razão o estudo do sinal de f' e de f'' é indispensável para justificar os extremos e as inflexões.

12. (Python) O programa seguinte calcula o valor de $f(x) = x^3 - 3x^2$ nos pontos notáveis do estudo da questão 1. Executa-o e indica exatamente o que é impresso, confirmando os zeros, o mínimo e o ponto de inflexão.

```
def f(x):
    return x ** 3 - 3 * x ** 2

for x in (0, 1, 2, 3):
    print('f(' + str(x) + ') =', f(x))

print('Mínimo local em x = 2 com f =', f(2))
print('Ponto de inflexão em x = 1 com f =', f(1))
```

Dica: constrói uma **tabela de variação** com as colunas x , f' , f'' e f , e nela marque os zeros das derivadas. A tabela organiza toda a informação do estudo e é a forma mais segura de justificar monotonia, extremos e concavidades sem omissões.

Soluções — Estudo completo de funções

1. $f(x) = x^3 - 3x^2$, com $D = \mathbb{R}$. Zeros: $x^2(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 3$ ($x = 0$ é zero duplo, pelo que o gráfico é aí tangente a Ox). $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$, que se anula em 0 e 2: como $f' > 0$ antes de 0, $f' < 0$ entre 0 e 2 e $f' > 0$ depois de 2, tem-se um **máximo em (0, 0)** e um **mínimo em (2, -4)**. $f''(x) = 6x - 6$ anula-se em 1 com mudança de sinal: **ponto de inflexão (1, -2)**. Comportamento no infinito: quando $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow +\infty$; quando $x \rightarrow -\infty$, $f(x) \rightarrow -\infty$.

2. $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x - 2)(x + 1)$, que se anula em $x = -1$ e $x = 2$. Como o coeficiente de x^2 é positivo na derivada, $f' > 0$ fora de $]-1, 2[$ e $f' < 0$ dentro: **máximo em $x = -1$** , com $f(-1) = -2 - 3 + 12 = 7$, e **mínimo em $x = 2$** , com $f(2) = 16 - 12 - 24 = -20$.

3. $f(x) = x/(x^2 + 1)$, com $D = \mathbb{R}$ (o denominador nunca se anula, pois $x^2 + 1 \geq 1$). $f'(x) = [(x^2 + 1) - x(2x)]/(x^2 + 1)^2 = (1 - x^2)/(x^2 + 1)^2$, que se anula em $x = \pm 1$: **máximo em (1, 1/2)** e **mínimo em (-1, -1/2)** (a função é ímpar, logo o gráfico é simétrico em relação à origem). Assíntota horizontal: quando $x \rightarrow \pm\infty$, $f(x) \rightarrow 0$, logo **$y = 0$** . Pontos de inflexão em $x = 0$ e em $x = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1,732051$, onde $f(0) = 0$ e $f(\sqrt{3}) \approx 0,433013$.

4. $f(x) = x e^{-x}$, com $D = \mathbb{R}$. $f'(x) = (1 - x)e^{-x}$, que se anula em $x = 1$ com $f' > 0$ antes e < 0 depois: **máximo em (1; 0,367879)** (isto é (1, 1/e)). $f''(x) = (x - 2)e^{-x}$, que se anula em $x = 2$: **ponto de inflexão (2; 0,270671)** (= (2, 2e⁻²)). Assíntota horizontal: quando $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow 0$, logo **$y = 0$** ; quando $x \rightarrow -\infty$, $f(x) \rightarrow -\infty$.

5. $f(x) = \ln x / x$, com $D =]0, +\infty[$. Zero: $\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$. $f'(x) = (1 - \ln x)/x^2$, que se anula quando $\ln x = 1$, isto é $x = e$, com $f' > 0$ antes e < 0 depois: **máximo em (e; 0,367879)** (= (e, 1/e)). Quando $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow 0$ (o numerador cresce muito mais devagar do que o denominador), logo **$y = 0$ é assíntota horizontal**. Quando $x \rightarrow 0^+$, $\ln x \rightarrow -\infty$ e o quociente tende para $-\infty$, uma vez que o numerador domina a descida; logo a reta **$x = 0$ é assíntota vertical** ao gráfico, e o ramo esquerdo da curva desce indefinidamente junto do eixo Oy .

6. $f(x) = x + 1/x$, com $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Assíntota **vertical $x = 0$** (quando $x \rightarrow 0$, $1/x \rightarrow \pm\infty$). Assíntota **obliqua $y = x$** , porque $f(x) - x = 1/x \rightarrow 0$. Extremos: $f'(x) = 1 - 1/x^2$, que se anula em $x^2 = 1$, isto é $x = \pm 1$: **mínimo em (1, 2)** e **máximo em (-1, -2)**. O gráfico tem dois ramos (um em cada lado da assíntota vertical), aproximando-se de $y = x$ nos extremos de cada ramo.

7. $f(x) = e^{-x^2}$, com $D = \mathbb{R}$ e sempre positiva (o contradomínio é $]0, 1[$). $f'(x) = -2x e^{-x^2}$, que se anula em $x = 0$, com $f' > 0$ antes e < 0 depois: **máximo em (0, 1)**. $f''(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$, que se anula em $x = \pm 1/\sqrt{2} \approx \pm 0,707107$, ambos com mudança de sinal: dois pontos de inflexão simétricos. Quando $x \rightarrow \pm\infty$, $f(x) \rightarrow 0$, logo **$y = 0$ é assíntota horizontal** — é a clássica «curva em forma de sino».

8. $f(x) = x^2 e^{-x}$, com $D = \mathbb{R}$ e $f(x) \geq 0$. $f'(x) = (2x - x^2)e^{-x} = x(2 - x)e^{-x}$, que se anula em $x = 0$ e $x = 2$. Como $f' < 0$ para $x < 0$, $f' > 0$ entre 0 e 2 e $f' < 0$ depois de 2, tem-se um **mínimo em (0, 0)** e um **máximo em (2; 0,541341)** (= (2, 4e⁻²)). Assíntota horizontal: $f(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow +\infty$, logo **$y = 0$** .

9. $f(x) = x^4 - 4x^3$, com $D = \mathbb{R}$. $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$, que se anula em $x = 0$ (zero duplo, sem mudança de sinal) e $x = 3$. Como $f' < 0$ antes de 3 e > 0 depois, existe um **mínimo em (3, -27)**. $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$, cujos zeros ($x = 0$ e $x = 2$) **ambos** correspondem a mudança de sinal — logo dois pontos de inflexão: **(0, 0)** e **(2, -16)**.

10. O estudo analítico **garante**: a existência e a localização exata dos zeros, dos extremos e dos pontos de inflexão, bem como a natureza de cada um (máximo ou mínimo) — porque se apoia no sinal das derivadas, que é uma dedução rigorosa. A representação gráfica, obtida com calculadora ou computador, apenas **sugere**: mostra o aspeto global da curva, ajuda a detetar assíntotas e pontos notáveis e permite verificar se os resultados analíticos são plausíveis, mas por si só não prova nada (a janela de visualização pode esconder ramos ou induzir em erro). A boa prática é usá-la como **confirmação** e não como justificação.

11. Os passos são: **(1)** determinar o domínio; **(2)** calcular os zeros e estudar o sinal de f ; **(3)** calcular f' , estudar o seu sinal e localizar extremos; **(4)** calcular f'' , estudar o seu sinal e localizar pontos de inflexão; **(5)** estudar o comportamento no infinito e as assíntotas; **(6)** esboçar o gráfico com toda a informação. O estudo do sinal das derivadas é indispensável porque **o anulamento de uma derivada não determina, por si só, a natureza do ponto**: $f'(x_0) = 0$ pode corresponder a um máximo, a um mínimo ou a nenhum extremo (ponto de estacionaridade), e $f''(x_0) = 0$ pode ou não corresponder a um ponto de inflexão. É a **mudança de sinal** — e portanto o estudo do sinal, e não apenas o cálculo dos zeros — que permite concluir corretamente.

12. O programa imprime: **$f(0) = 0 \cdot f(1) = -2 \cdot f(2) = -4 \cdot f(3) = 0$** . **Mínimo local em $x = 2$ com $f = -4$** . **Ponto de inflexão em $x = 1$ com $f = -2$** . Estes valores confirmam ponto por ponto o estudo analítico da questão 1: $f(0) = 0$ e $f(3) = 0$ são os dois zeros, $f(2) = -4$ é o valor mínimo local e $f(1) = -2$ é a ordenada do ponto de inflexão (1, -2).

Nota: a ordem dos passos importa — o domínio vem sempre primeiro, porque tudo o resto (zeros, derivadas, assíntotas) só faz sentido dentro dele. E os resultados obtidos por via gráfica devem ser sempre justificados analiticamente.