

Ficha 4 — Equações exponenciais e logarítmicas e modelação

12.º Ano Matemática A 4 páginas 12 exercícios

Objetivo: resolver equações exponenciais e logarítmicas analiticamente (igualando bases, por mudança de variável e recorrendo a logaritmos), interpretar graficamente o número de soluções e usar estes modelos em situações de juro composto, decaimento radioativo e crescimento logístico.

Revisão rápida — equações e modelação

- Bases iguais:** $a^u = a^v \Leftrightarrow u = v$ (a função exponencial é injetiva). O primeiro passo é sempre **escrever os dois membros como potências da mesma base**: $27 = 3^3$, $8 = 2^3$, $1/9 = 3^{-2}$.
- Bases diferentes:** quando não é possível igualar as bases, aplica-se logaritmo aos dois membros: $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$. Exemplo: $5^x = 20 \Leftrightarrow x = \log_5 20$.
- Mudança de variável:** em equações com a potência repetida usa-se $t = a^x$ (ou $t = \log_a x$), resolve-se a equação quadrática em t e no fim **desfaz-se a substituição**. A condição $t > 0$ (ou $x > 0$, no caso dos logaritmos) elimina raízes falsas.
- Equações logarítmicas:** usa-se a definição $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$ e as propriedades operatórias. É **obrigatório impor as condições de existência** (todos os argumentos positivos) e verificar as soluções.
- Leitura gráfica:** o número de soluções de $f(x) = g(x)$ é o número de interseções dos dois gráficos. A monotonia permite provar que a solução é **única**.
- Modelação:** *juro composto* $C(t) = C_0(1 + i)^t$; *decaimento radioativo* (meia-vida h) $m(t) = m_0(1/2)^{t/h}$; *função logística* $f(x) = L / (1 + b e^{-kx})$, que tende para o valor limite L .

Exercícios

1. Bases iguais: resolve $3^{2x-1} = 27$.

2. Bases diferentes com potências: resolve $4^x = 8$, escrevendo ambos os membros como potências de base 2.

3. Mudança de variável: resolve a equação $2^{2x} - 5 \times 2^x + 4 = 0$.

4. Recorrendo a logaritmos: resolve $5^x = 20$ e apresenta o valor exato e um valor aproximado às décimas de milésima.

5. Equação logarítmica: resolve $\log_2(3x - 5) = 3$, começando por impor a condição de existência.

6. Propriedades operatórias: resolve $\log x + \log(x - 3) = 1$ (logaritmos decimais) e explica por que razão uma das raízes da equação quadrática obtida não serve.

7. Exponencial com logaritmo: resolve $2^x = 30$ e indica um valor aproximado às décimas de milésima.

8. Mudança de variável logarítmica: resolve $(\log_3 x)^2 - 4 \times \log_3 x + 3 = 0$.

9. Leitura gráfica: justifica, usando a monotonia, que a equação $2^x = -x + 1$ tem exatamente uma solução, e identifica-a.

10. Juro composto: um capital de 10 000 € é depositado à taxa anual de 3%, pelo que vale $10\,000 \times 1,03^t$ após t anos. Determina em quanto tempo atinge 12 000 € e indica em que ano isso acontece, justificando com os valores dos anos consecutivos.

11. Modelação: a) uma substância radioativa tem meia-vida de 5 anos e massa inicial de 100 g, decaindo segundo $m(t) = 100 \times (1/2)^{t/5}$ — determina quando resta 12,5 g · b) numa cultura, o número de indivíduos evolui segundo a função logística $f(x) = 100 / (1 + 9e^{-0,5x})$ — determina o valor de x para o qual a população atinge 50 indivíduos.

12. (Python) O programa seguinte determina em quantos anos um capital de 10 000 € à taxa anual de 3% atinge 12 000 €. Executa-o e indica exatamente o que é impresso, confirmando o resultado da questão 10.

```
from math import log

capital_inicial = 10000
capital_final = 12000
taxa = 1.03

t = log(capital_final / capital_inicial) / log(taxa)
print('Anos necessarios:', round(t, 4))
print('Capital ao fim de', int(t) + 1, 'anos:', round(capital_inicial * taxa ** (int(t) + 1), 2))
```

Dica: em equações logarítmicas, resolve primeiro e **verifica depois** — escreve sempre as condições de existência no início, mas confirma cada solução na equação original, porque as propriedades operatórias podem introduzir raízes que nunca pertenceriam ao domínio.

Soluções — Equações exponenciais e logarítmicas

1. $3^{2x-1} = 27 \Leftrightarrow 3^{2x-1} = 3^3 \Leftrightarrow 2x - 1 = 3 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$.

2. $4^x = 8 \Leftrightarrow (2^2)^x = 2^3 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^3 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = 3/2$ (ou seja 1,5). Confirmação: $4^{1.5} = \sqrt{4^3} = 8 \checkmark$

3. Com $t = 2^x$ ($t > 0$) e $2^{2x} = (2^x)^2 = t^2$, vem $t^2 - 5t + 4 = 0$, cujas raízes são $t = 1$ e $t = 4$. Desfazendo a substituição: $2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$; $2^x = 4 = 2^2 \Leftrightarrow x = 2$. Ambas as raízes são positivas, pelo que ambas servem. Confirmação: $x = 0$ dá $1 - 5 + 4 = 0 \checkmark$ e $x = 2$ dá $16 - 20 + 4 = 0 \checkmark$

4. Aplicando logaritmo de base 5 aos dois membros: $x = \log_5 20$ (valor exato) $= \ln 20 / \ln 5 \approx 1,8614$. Confirmação: $5^{1,8614} \approx 20 \checkmark$

5. Condição de existência: $3x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > 5/3$. Da definição, $\log_2(3x - 5) = 3 \Leftrightarrow 3x - 5 = 2^3 = 8 \Leftrightarrow 3x = 13 \Leftrightarrow x = 13/3 \approx 4,333$, que respeita a condição. Confirmação: $\log_2(3 \times 13/3 - 5) = \log_2 8 = 3 \checkmark$

6. Condições de existência: $x > 0$ e $x - 3 > 0$, logo $x > 3$. Pela propriedade do produto: $\log[x(x - 3)] = 1 \Leftrightarrow x(x - 3) = 10^1 = 10 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$, cujas raízes são $x = 5$ e $x = -2$. A raiz $x = -2$ não serve porque viola a condição de existência ($\log(-2)$ não existe — os argumentos têm de ser positivos). Logo $x = 5$. Confirmação: $\log 5 + \log 2 = \log 10 = 1 \checkmark$

7. $x = \log_2 30 = \ln 30 / \ln 2 \approx 4,9069$. Confirmação: $2^{4,9069} \approx 30 \checkmark$

8. Com $t = \log_3 x$ vem $t^2 - 4t + 3 = 0$, donde $t = 1$ ou $t = 3$. Desfazendo: $\log_3 x = 1 \Leftrightarrow x = 3$; $\log_3 x = 3 \Leftrightarrow x = 3^3 \Leftrightarrow x = 27$. Ambas são positivas, pelo que ambas servem (o domínio do logaritmo exige $x > 0$). Confirmação: $\log_3 3 = 1$ e $\log_3 27 = 3 \checkmark$

9. Considere-se $g(x) = 2^x + x - 1$, cujos zeros são as soluções da equação. A função g é a soma de duas funções estritamente crescentes em $\mathbb{R}$ — a exponencial 2^x (base maior do que 1) e a função afim $x - 1$ — e por isso é ela própria **estritamente crescente**, logo injetiva. Uma função estritamente crescente tem **no máximo um zero**. Como $g(0) = 2^0 + 0 - 1 = 0$, existe essa solução e é única: $x = 0$. Graficamente, a exponencial $y = 2^x$ e a reta decrescente $y = -x + 1$ cortam-se num único ponto, o ponto $(0, 1)$.

10. $10\,000 \times 1,03^t = 12\,000 \Leftrightarrow 1,03^t = 1,2 \Leftrightarrow t = \ln 1,2 / \ln 1,03 \approx 6,1681$ anos. Justificação com anos consecutivos: ao fim de 6 anos o capital é $10\,000 \times 1,03^6 \approx 11\,940,52 \text{ €}$ (ainda abaixo de $12\,000 \text{ €}$) e ao fim de 7 anos é $10\,000 \times 1,03^7 \approx 12\,298,74 \text{ €}$ (já acima). Como são precisos mais de 6 anos e menos de 7, o capital atinge os $12\,000 \text{ €}$ durante o 7.º ano.

11. a) $100 \times (1/2)^{t/5} = 12,5 \Leftrightarrow (1/2)^{t/5} = 0,125$. Como $0,125 = (1/2)^3$, vem $t/5 = 3 \Leftrightarrow t = 15$ anos. b) $100/(1 + 9e^{-0,5x}) = 50 \Leftrightarrow 1 + 9e^{-0,5x} = 2 \Leftrightarrow 9e^{-0,5x} = 1 \Leftrightarrow e^{-0,5x} = 1/9$. Aplicando logaritmo: $-0,5x = \ln(1/9) = -\ln 9 \Leftrightarrow x = \ln 9 / 0,5 \approx 4,3944$. Confirmação: $f(4,3944) \approx 50 \checkmark$ (e $f(0) = 100/10 = 10$, o valor inicial, confirmando o modelo).

12. O programa imprime: **Anos necessários: 6.1681 e Capital ao fim de 7 anos: 12298.74**. O primeiro valor confirma o resultado analítico da questão 10 ($\ln 1,2 / \ln 1,03 \approx 6,1681$ anos) e o segundo calcula o capital no ano inteiro seguinte, obtendo $12\,298,74 \text{ €}$ — também coincidente com o valor determinado à mão, o que mostra que o capital já ultrapassou os $12\,000 \text{ €}$ nesse ano.

Nota: apresenta sempre o resultado de uma equação exponencial ou logarítmica em **duas formas**: o valor exato ($\log_5 20$, $13/3$) e o valor aproximado arredondado ($1,8614$; $4,333$). O valor exato mostra o raciocínio, o aproximado responde ao problema — e ambos devem ser confirmados por substituição na equação original.