

Ficha 8 — Derivadas das funções trigonométricas

12.º Ano

Matemática A

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: conhecer e aplicar as derivadas de $\sin x$, $\cos x$ e $\tan x$, derivar expressões que as combinam com as funções já estudadas (potências, exponenciais, logaritmos) e determinar declives e retas tangentes em pontos concretos, usando a regra da cadeia quando necessário.

Revisão rápida — derivadas trigonométricas

- **Senos:** $(\sin x)' = \cos x$. Em $x = 0$ o declive é 1.
- **Cossenos:** $(\cos x)' = -\sin x$. Em $x = \pi/2$ o declive é -1 .
- **Tangentes:** $(\tan x)' = 1/\cos^2 x$, com $\cos x \neq 0$. Equivale a $1 + \tan^2 x$. Em $x = 0$ o declive é 1 e em $x = \pi/4$ vale 2.
- **Somas e constantes:** derivam-se termo a termo, mantendo as constantes multiplicativas — por exemplo $(3 \sin x)' = 3 \cos x$.
- **Com a regra da cadeia:** $(\sin u)' = u' \cos u$, $(\cos u)' = -u' \sin u$ e $(\tan u)' = u'/\cos^2 u$. Exemplos: $(\sin 3x)' = 3 \cos 3x$ e $(\cos x^2)' = -2x \sin x^2$.
- **Com a exponencial e o logaritmo:** $(e^{\sin x})' = \cos x \times e^{\sin x}$ e $(\ln(\sin x))' = \cos x / \sin x$ (para $\sin x > 0$).
- **Reta tangente:** $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. Em pontos de máximo ou mínimo de $\sin$ e $\cos$ (como $x = \pi/2$ em $\sin x$), a derivada é zero e a tangente é horizontal.

Exercícios

1. Seno: indica a derivada de $f(x) = \sin x$ e determina o declive da reta tangente em $x = 0$.

2. Cosseno: indica a derivada de $g(x) = \cos x$ e determina o declive da reta tangente em $x = \pi/2$.

3. Tangente: indica a derivada de $h(x) = \tan x$ e calcula o declive em $x = 0$ e em $x = \pi/4$, confirmando o resultado com a identidade $1 + \tan^2 x$.

4. Soma de seno e cosseno: determina a derivada de $f(x) = \sin x + \cos x$ e mostra que em $x = \pi/4$ a derivada se anula.

5. Constante multiplicativa: determina a derivada de $f(x) = 3 \sin x$ e calcula $f'(0)$.

6. Soma com polinómio: determina a derivada de $f(x) = x + \sin x$ e calcula $f'(0)$.

7. Combinação de duas trigonométricas: determina a derivada de $f(x) = 2 \cos x - \sin x$ e calcula $f'(0)$.

8. Com a regra da cadeia: determina a derivada e calcula o valor pedido: a) $h(x) = \sin 3x$, em $x = 0$ · b) $h(x) = \cos x^2$, em $x = 1$ (seis casas decimais).

9. Trigonómica dentro da exponencial: determina a derivada de $h(x) = e^{\sin x}$ e calcula $h'(0)$.

10. Retas tangentes: determina a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sin x$ em $x = 0$ e em $x = \pi/2$, interpretando as duas inclinações.

11. Justificação da derivada da tangente: partindo de $\tan x = \sin x / \cos x$, mostra que $(\tan x)' = 1/\cos^2 x$.

12. (Python) O programa seguinte estima o declive da tangente a $f(x) = \sin x$ em $x = \pi/3$ pelo quociente de diferenças e compara-o com o valor exato de $\cos(\pi/3)$. Executa-o e indica exatamente o que é impresso.

```
from math import sin, cos, pi

x = pi / 3
passo = 0.000001
numerica = (sin(x + passo) - sin(x)) / passo
print('Derivada numerica:', round(numerica, 6))
print('cos(x):', round(cos(x), 6))
```

Dica: memoriza o par de sinais como uma **cadeia**: a derivada do seno é o cosseno, a do cosseno é o seno *com sinal negativo* — «desce-se» sempre com um sinal menos. E lembra-te de que, no ponto de máximo de $\sin x$ ($x = \pi/2$), a derivada tem de ser zero: é uma verificação rápida de que a fórmula está certa.

Soluções — Derivadas das funções trigonométricas

1. $f'(x) = \cos x$. Em $x = 0$: $f'(0) = \cos 0 = 1$ — a tangente ao gráfico do seno na origem tem declive 1 (é a reta $y = x$).
 2. $g'(x) = -\sin x$. Em $x = \pi/2$: $g'(\pi/2) = -\sin(\pi/2) = -1$ — no ponto $(\pi/2, 0)$, onde o cosseno se anula, a curva desce com declive -1 .
 3. $h'(x) = 1/\cos^2 x$ (válida para $\cos x \neq 0$). Em $x = 0$: $1/\cos^2 0 = 1/1 = 1$. Em $x = \pi/4$: $\tan(\pi/4) = 1$, logo pela identidade $1 + \tan^2 x = 1 + 1 = 2$, e de facto $1/\cos^2(\pi/4) = 1/(\sqrt{2}/2)^2 = 1/(1/2) = 2$ ✓
 4. $f'(x) = \cos x - \sin x$. Em $x = \pi/4$: $\cos(\pi/4) - \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2 - \sqrt{2}/2 = 0$ — a derivada anula-se, o que corresponde ao máximo da função $f(x) = \sin x + \cos x$ nesse ponto (onde f vale $\sqrt{2}$).
 5. $f'(x) = 3 \cos x$. Em $x = 0$: $f'(0) = 3 \times \cos 0 = 3$.
 6. $f'(x) = 1 + \cos x$. Em $x = 0$: $f'(0) = 1 + 1 = 2$.
 7. $f'(x) = -2 \sin x - \cos x$. Em $x = 0$: $f'(0) = -2 \times 0 - 1 = -1$.
 8. a) Com $u(x) = 3x$ ($u' = 3$): $h'(x) = 3 \cos 3x$. Em $x = 0$: $h'(0) = 3 \cos 0 = 3 \times 1 = 3$. b) Com $u(x) = x^2$ ($u' = 2x$): $h'(x) = -2x \sin x^2$. Em $x = 1$: $h'(1) = -2 \times 1 \times \sin 1 = -2 \sin 1 \approx -1,682942$.
 9. Com $u(x) = \sin x$ ($u' = \cos x$): $h'(x) = \cos x \times e^{\sin x}$. Em $x = 0$: $h'(0) = \cos 0 \times e^{\sin 0} = 1 \times e^0 = 1$.
 10. Em $x = 0$: $f(0) = \sin 0 = 0$ e $f'(0) = \cos 0 = 1$, logo a tangente é $y = 0 + 1(x - 0)$, isto é $y = x$. Em $x = \pi/2$: $f(\pi/2) = 1$ e $f'(\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$, logo a tangente é $y = 1 + 0(x - \pi/2)$, isto é $y = 1$. Interpretação: em $x = 0$ a curva sobe com inclinação de 45° ; em $x = \pi/2$ (ponto de máximo do seno) a tangente é **horizontal**, porque aí a função deixa de crescer e começa a decrescer.
 11. Sendo $\tan x = \sin x / \cos x$, aplica-se a regra do quociente: $(\tan x)' = [\cos x \times \cos x - \sin x \times (-\sin x)] / \cos^2 x = (\cos^2 x + \sin^2 x) / \cos^2 x$. Pela identidade fundamental da trigonometria, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, pelo que $(\tan x)' = 1/\cos^2 x$ ✓ (o que também mostra que a derivada da tangente é sempre positiva nos intervalos em que está definida, ou seja, a tangente é sempre crescente entre assíntotas).
 12. O programa imprime: **Derivada numerica: 0.5 e cos(x): 0.5**. O primeiro valor obtém-se pelo quociente de diferenças $[\sin(x+h) - \sin(x)]/h$ com $h = 0,000001$, dando 0,5; o segundo é o valor exato de $\cos(\pi/3) = 0,5$. Os dois coincidem, confirmando numericamente que $(\sin x)' = \cos x$ no ponto considerado.
- Nota:** as três derivadas trigonométricas aparecem frequentemente combinadas com as restantes regras. Ao resolver, identifique primeiro as operações (soma, constante, composição) e só depois aplique as tabelas de derivadas — evita o erro mais comum, que é esquecer o sinal negativo em $(\cos x)'$.