

Resumo — Derivadas e cálculo diferencial

12.º Ano

Matemática A

2 páginas

Síntese

Esta síntese reúne o cálculo diferencial do 12.º ano: significado da derivada, derivadas das funções exponencial e logarítmica, regras de derivação, regra da cadeia, derivadas trigonométricas, segunda derivada com concavidades e pontos de inflexão, e otimização.

1. Derivada: definição e significado

- A derivada de f num ponto a é o **limite da taxa média de variação** quando o acréscimo tende para zero: $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} [f(a+h) - f(a)]/h$.
- Interpretações:** $f'(a)$ é o **declive da reta tangente** ao gráfico no ponto de abcissa a e a **taxa de variação instantânea** de f em a .
- A reta tangente em $(a, f(a))$ tem equação $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.
- Monotonia:** se $f' > 0$ num intervalo, f é estritamente crescente nesse intervalo; se $f' < 0$, é estritamente decrescente.
- Nos **extremos** de funções deriváveis a derivada anula-se ($f'(a) = 0$), mas o recíproco não é verdadeiro: o anulamento só dá um extremo se houver **mudança de sinal**.

2. Derivadas de e^x e de $\ln x$

- $(e^x)' = e^x$ — a exponencial de base e é a única função (a menos de constante multiplicativa) igual à sua derivada.
- $(\ln x)' = 1/x$, para $x > 0$.
- Em geral, $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ — em particular $(2^x)' = 2^x \ln 2$, e $(e^{kx})' = k e^{kx}$.
- Derivada da potência: $(x^n)' = n x^{n-1}$ (válida para qualquer expoente real, no domínio).

3. Regras de derivação

- Soma:** $(f + g)' = f' + g'$.
- Constante:** $(k \cdot f)' = k \cdot f'$.
- Produto:** $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.
- Quociente:** $(f / g)' = (f' \cdot g - f \cdot g') / g^2$.

4. Regra da cadeia

- Para funções compostas: $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ — deriva-se a função «de fora» no ponto $g(x)$ e multiplica-se pela derivada da «de dentro».
- Exemplos: $(e^{3x})' = 3e^{3x}$; $(\ln(2x+1))' = 2/(2x+1)$; $[(3x-2)^5]' = 5(3x-2)^4 \cdot 3 = 15(3x-2)^4$ — que em $x=2$ vale $15 \cdot 4^4 = 3840$.
- Erro típico:** derivar a função composta como se fosse simples, esquecendo o fator $g'(x)$.

5. Derivadas das funções trigonométricas

- $(\sin x)' = \cos x$ e $(\cos x)' = -\sin x$.
- $(\tan x)' = 1/\cos^2 x = 1 + \tan^2 x$, para $x \neq \pi/2 + k\pi$. Teste: em $x = \pi/4$, $\tan(\pi/4) = 1$ e $1 + \tan^2(\pi/4) = 2$, que é o valor de $1/\cos^2(\pi/4)$.
- Com a regra da cadeia: $(\sin(3x))' = 3\cos(3x)$; $(\cos(x^2))' = -2x \sin(x^2)$.

6. Segunda derivada, concavidades e inflexão

- A **segunda derivada** obtém-se derivando f' : escreve-se f'' ou $f^{(2)}$.
- Concavidade**: se $f'' > 0$ num intervalo, o gráfico tem a concavidade **voltada para cima**; se $f'' < 0$, **voltada para baixo**.
- Ponto de inflexão**: ponto onde a concavidade **muda de sentido** — exige $f''(a) = 0$ e mudança de sinal de f'' em a .
- Contraexemplo importante**: para $f(x) = x^4$ tem-se $f''(x) = 12x^2$, que se anula em $x = 0$ mas **nunca é negativa** — não há mudança de sinal, logo $x = 0$ **não** é ponto de inflexão.
- Extremos**: se $f'(a) = 0$ e $f''(a) > 0$, há um mínimo; se $f''(a) < 0$, há um máximo. Exemplo: $f(x) = x^2 - 4x$ tem $f'(2) = 0$ e $f''(2) = 2 > 0$, logo mínimo em $x = 2$. Quando $f''(a) = 0$ este teste é inconclusivo — decide-se pelo sinal de f' .

7. Otimização

- Método**: (1) identificar a grandeza a otimizar e escrevê-la como função de **uma só** variável, usando as restrições do problema; (2) determinar o domínio com significado; (3) derivar, igualar a zero e resolver; (4) **justificar** que é máximo ou mínimo (sinal da derivada ou concavidade); (5) calcular o valor pedido e responder ao problema.
- Exemplo: com perímetro fixo, a área máxima de um retângulo obtém-se quando é um **quadrado**; com área fixa, o perímetro mínimo obtém-se também no quadrado.
- O método da bissecção e o de Newton-Raphson (estudados na ficha de resolução aproximada de equações) permitem aproximar os zeros de f' quando a equação não se resolve analiticamente — o método de Newton-Raphson usa precisamente a derivada.

8. Tabela-resumo das derivadas

Função	Derivada	Observação
x^n	$n x^{n-1}$	válida para expoente real
e^x	e^x	a função igual à sua derivada
a^x	$a^x \ln a$	surge o fator $\ln a$
$\ln x$	$1/x$	só para $x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	—
$\cos x$	$-\sin x$	atenção ao sinal
$\tan x$	$1 + \tan^2 x$	$x \neq \pi/2 + k\pi$
$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$	regra da cadeia

9. Erros frequentes a evitar

- Esquecer o fator $g'(x)$ na **regra da cadeia** — o erro mais comum de todos.
- Derivar o produto como $(f \cdot g)' = f' \cdot g'$ ou o quociente como f'/g' (as regras corretas estão acima).
- Assumir que $f'(a) = 0$ garante um extremo, ou que $f''(a) = 0$ garante uma inflexão.
- Trocar o sinal de $(\cos x)'$: é **$-\sin x$** .
- Concluir sobre a natureza de um extremo pelo valor de f em vez do **sinal** da derivada.
- Na otimização, deixar duas variáveis na função a otimizar ou ignorar o domínio com significado.

Controlo rápido: $(e^x)' = e^x$ e $(\ln x)' = 1/x$; $[(3x - 2)^5]' = 15(3x - 2)^4$, que em $x = 2$ vale 3840; $1 + \tan^2(\pi/4) = 2$. Para $f(x) = x^2 - 4x$: $f'(2) = 0$ e $f''(2) = 2 > 0$, logo há mínimo em $x = 2$ — o valor mínimo é $f(2) = -4$.