

## Ficha 11 — Continuidade, limites e assíntotas

12.º Ano

Matemática A

4 páginas

12 exercícios

**Objetivo:** estudar a continuidade de uma função num ponto, calcular limites com indeterminações (por simplificação algébrica e pela regra de L'Hôpital), usar os limites notáveis e determinar assíntotas verticais, horizontais e oblíquas ao gráfico de uma função.

### Revisão rápida — continuidade, limites e assíntotas

- **Continuidade em  $x = a$ :** uma função é contínua em  $a$  se (i)  **$f(a)$  está definida**, (ii) **existe**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  e (iii) os dois valores são **iguais**. Falhando qualquer destas condições, a função não é contínua em  $a$ .
- **Indeterminações:** escreve-se  $0/0$ ,  $\infty/\infty$ ,  $\infty-\infty$ ,  $0 \times \infty$  ou  $1^\infty$ . Não são respostas: obrigam a trabalho adicional, por simplificação, por levantamento da indeterminação ou pela regra de L'Hôpital.
- **Indeterminações  $0/0$  e  $\infty/\infty$ :** quando  $f$  e  $g$  são deriváveis e  $g' \neq 0$  perto do ponto, a regra de **L'Hôpital** permite escrever  $\lim f/g = \lim f'/g'$ .
- **Limites notáveis:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x / x = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)/x = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)/x = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + 1/x)^x = e$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x / x = 0$ .
- **Assíntota vertical  $x = a$ :** quando  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$  (o gráfico «sobe» indefinidamente junto da reta).
- **Assíntota horizontal  $y = b$ :** quando  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$  (valor finito).
- **Assíntota oblíqua  $y = mx + b$ :** quando  $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)/x$  é finito e não nulo, e  $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx]$ . Verifica-se quando o numerador tem grau uma unidade acima do denominador.

### Exercícios

1. Limites notáveis: indica o valor de: a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x / x$  · b)  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)/x$  · c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 1/x)^x$ .

2. Indeterminação  $0/0$ : calcula  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4)/(x - 2)$ , levantando a indeterminação por simplificação.

3. Indeterminação  $\infty/\infty$ : calcula  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + 2x)/(x^2 - 1)$ .

4. Regra de L'Hôpital: calcula  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)/x$  aplicando a regra de L'Hôpital e confirma o valor com o limite notável correspondente.

5. L'Hôpital com logaritmo: calcula  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + x)/x$  pela regra de L'Hôpital.

6. Comparação de crescimentos: calcula  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x / x$  pela regra de L'Hôpital e interpreta o resultado.

7. Continuidade: a função  $f(x) = (x^2 - 9)/(x - 3)$  não está definida em  $x = 3$ . Que valor se deve atribuir a  $f(3)$  para que  $f$  seja contínua nesse ponto? Justifica com o limite.

8. Assíntota vertical: determina a assíntota vertical do gráfico de  $f(x) = 1/(x - 2)$  e estuda o comportamento de  $f$  junto dessa reta.

9. Assíntota horizontal: determina a assíntota horizontal do gráfico de  $f(x) = (2x + 1)/(x - 3)$  e indica se o gráfico a cruza.

10. Assíntota oblíqua: para  $f(x) = (x^2 + 1)/x$ , escreve  $f(x)$  na forma  $x + k/x$  e determina a assíntota oblíqua do gráfico.

11. Justificação: enuncia as três condições necessárias e suficientes para que uma função seja contínua num ponto  $a$  e explica o que falha em cada uma delas quando a função não é contínua.

12. (Python) O programa seguinte aproxima o limite  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)/x$  com dois valores de  $x$  cada vez mais próximos de zero. Executa-o e indica exatamente o que é impresso, comentando a conjectura obtida.

```
from math import exp

x = 0.000001
valor = (exp(x) - 1) / x
print('Valor em x = 0,000001:', round(valor, 6))
print('Valor em x = 0,0000001:', round((exp(x / 10) - 1) / (x / 10), 7))
print('Conjetura do limite:', 1)
```

**Dica:** antes de aplicar L'Hôpital, verifica sempre que se trata mesmo de uma **indeterminação**  $0/0$  ou  $\infty/\infty$ . Aplicar a regra fora dessas condições produz resultados errados. E, depois de derivar numerador e denominador, confirma que o novo limite já não é indeterminado antes de concluir.

## Soluções — Continuidade, limites e assíntotas

1. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x / x = 1$  · b)  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)/x = 1$  · c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 1/x)^x = e \approx 2,71828$ . Os dois primeiros são limites notáveis de indeterminação  $0/0$  e o terceiro é a definição do número de Euler como limite (a expressão  $(1 + 1/x)^x$  tende para  $e \approx 2,718282$ , como se confirma numericamente).
  2. Em  $x = 2$  a expressão dá  $0/0$ . Fatorizando o numerador (diferença de quadrados):  $(x^2 - 4)/(x - 2) = (x - 2)(x + 2)/(x - 2) = x + 2$ , para  $x \neq 2$ . Logo  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4)/(x - 2) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$  (valor confirmado numericamente: 4,000000).
  3. Em  $+\infty$  a expressão dá  $\infty/\infty$ . Dividindo numerador e denominador por  $x^2$ :  $(3 + 2/x)/(1 - 1/x^2)$ . Como  $2/x \rightarrow 0$  e  $1/x^2 \rightarrow 0$ , o limite é  $3/1 = 3$ . É o caso típico em que o limite é o quociente dos **coeficientes dos termos de maior grau** (3 e 1).
  4. Em  $x = 0$  a expressão dá  $0/0$ , logo aplica-se L'Hôpital: derivando numerador e denominador obtém-se  $e^x/1$ , e  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^0 = 1$ . O resultado coincide com o limite notável, como tinha de acontecer.
  5. Em  $x = 0$  a expressão dá  $0/0$ . Com L'Hôpital: a derivada de  $\ln(1 + x)$  é  $1/(1 + x)$  e a derivada de  $x$  é 1, pelo que o limite é  $\lim_{x \rightarrow 0} 1/(1 + x) = 1/(1 + 0) = 1$  (confirmado numericamente: 0,99999995).
  6. Em  $+\infty$  a expressão dá  $\infty/\infty$ . Por L'Hôpital: derivando numerador e denominador obtém-se  $(1/x)/1 = 1/x$ , e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1/x = 0$ . Interpretação: o logaritmo cresce, mas **tão lentamente** que o quociente  $\ln x / x$  tende para zero — o crescimento de  $x$  «ganha» sempre ao do logaritmo (a verificação numérica em  $x = 10^8$  dá  $\approx 2,07 \times 10^{-8}$ , confirmando a aproximação a zero).
  7. Em  $x = 3$  o numerador e o denominador anulam-se, dando  $0/0$ . Fatorizando:  $(x - 3)(x + 3)/(x - 3) = x + 3$  para  $x \neq 3$ , logo  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3 + 3 = 6$  (o mesmo valor se obtém pela esquerda e pela direita: 5,999 e 6,001 com aproximações sucessivas). Como o limite existe e é finito, basta definir  **$f(3) = 6$**  para que a função seja contínua em  $x = 3$  — a descontinuidade era **removível**.
  8. Em  $x = 2$  o denominador anula-se e o numerador não, logo a função não tem limite finito aí: quando  $x \rightarrow 2^+$ ,  $x - 2 \rightarrow 0^+$  e  $f(x) \rightarrow +\infty$ ; quando  $x \rightarrow 2^-$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$ . Como o limite é infinito, a reta  **$x = 2$  é assíntota vertical** ao gráfico — a curva aproxima-se dela «subindo» à direita e «descendo» à esquerda.
  9. Dividindo numerador e denominador por  $x$ :  $(2 + 1/x)/(1 - 3/x) \rightarrow 2/1 = 2$  quando  $x \rightarrow \pm\infty$ . Logo a reta  **$y = 2$  é assíntota horizontal**. Neste caso o gráfico **não cruza** a assíntota: para o verificar, resolve-se  $(2x + 1)/(x - 3) = 2$ , obtendo  $2x + 1 = 2x - 6$ , isto é  $1 = -6$  — uma igualdade impossível, o que confirma que o gráfico se aproxima de  $y = 2$  sem nunca a atingir.
  10. Separando a fração:  $(x^2 + 1)/x = x^2/x + 1/x = x + 1/x$ . Quando  $x \rightarrow \pm\infty$ , a parcela  $1/x$  tende para 0, pelo que  $f(x) - x \rightarrow 0$  e o gráfico aproxima-se indefinidamente da reta  **$y = x$** , que é a **assíntota oblíqua** (o mesmo se obteria com  $m = \lim f(x)/x = 1$  e  $b = \lim [f(x) - x] = 0$ ).
  11. As três condições são: (i)  $f(a)$  está definida, ou seja  $a$  pertence ao domínio de  $f$ ; (ii) existe o limite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , isto é os limites laterais existem e são iguais entre si (e finitos); (iii) esse limite é igual a  $f(a)$ . Quando falha (i), a função tem um **ponto não pertencente ao domínio** (como  $f(x) = 1/(x - 2)$  em  $x = 2$ ); quando falha (ii), há **salto** ou limite infinito (os limites laterais diferem ou explodem); quando falha (iii) apenas, trata-se de uma descontinuidade **removível** — o limite existe, mas o valor atribuído à função no ponto é diferente dele, bastando redefinir  $f(a)$  para corrigir (como na questão 7).
  12. O programa imprime: **Valor em  $x = 0,000001$ : 1,0** · **Valor em  $x = 0,0000001$ : 1,0** · **Conjetura do limite: 1**. Com  $x = 10^{-6}$  e depois com  $x = 10^{-7}$  o quociente  $(e^x - 1)/x$  mantém-se em 1,0 até à sexta e à sétima casa decimal, respetivamente. A **conjetura** é  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)/x = 1$ , confirmada analiticamente pela regra de L'Hôpital na questão 4. Note-se que a aproximação numérica apenas *sugere* o valor do limite: a prova exata é a analítica.
- Nota:** distingue «calcular o valor no ponto» de «calcular o limite no ponto». Em  $(x^2 - 9)/(x - 3)$  o primeiro não existe ( $0/0$ ) mas o segundo existe e vale 6 — é exatamente essa diferença que define a continuidade e permite remover a descontinuidade.