

Ficha 1 — Números complexos: a unidade imaginária e as equações do 2.º grau

12.º Ano

Matemática A

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: identificar a unidade imaginária i e o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, reconhecer $\mathbb{R}$ como subconjunto de $\mathbb{C}$, simplificar potências de i e resolver equações do 2.º grau sem raízes reais, recorrendo a um programa em Python.

Revisão rápida — a unidade imaginária e o conjunto $\mathbb{C}$

- **Unidade imaginária:** define-se i como o número que verifica $i^2 = -1$. Assim, a equação $x^2 = -1$ tem a solução $x = i$ (e também $x = -i$).
- **Conjunto $\mathbb{C}$:** $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$, onde a é a **parte real** e b a **parte imaginária**. Como todo o número real a se escreve $a + 0i$, tem-se $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- **Não há ordem em $\mathbb{C}$:** as relações $<$ e $>$ não se definem entre números complexos não reais — só faz sentido comparar as suas partes reais ou os seus módulos.
- **Potências de i — ciclo de período 4:** $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, ... Para calcular i^n divide-se n por 4 e usa-se o resto: resto 0 $\rightarrow 1$ · resto 1 $\rightarrow i$ · resto 2 $\rightarrow -1$ · resto 3 $\rightarrow -i$.
- **Equação $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)** e o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$: se $\Delta > 0$ há duas raízes reais distintas; se $\Delta = 0$ há uma raiz real dupla; se $\Delta < 0$ **não há raízes reais**, mas existem **duas raízes complexas conjugadas**, dadas por $x = (-b \pm i\sqrt{(-\Delta)}) / (2a)$.
- **Complexos conjugados:** as duas raízes de uma equação do 2.º grau com $\Delta < 0$ são conjugadas uma da outra — diferem apenas no sinal da parte imaginária.

Exercícios

1. Potências de i : calcula i^0 , i^1 , i^2 , i^3 , i^4 , i^5 , i^6 , i^7 e i^8 e descreve o padrão que observas.

2. Simplificação: simplifica a) i^{17} · b) i^{30} · c) i^{101} · d) i^{2026}

3. Em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{C}$: resolve em $\mathbb{R}$ e, em seguida, em $\mathbb{C}$: a) $x^2 + 9 = 0$ · b) $x^2 + 5 = 0$

4. Sem raízes reais: resolve a equação $x^2 + 2x + 5 = 0$, indicando o valor do discriminante e as duas soluções.

5. Coeficiente inicial diferente de 1: resolve $2x^2 - 4x + 5 = 0$ e apresenta as soluções na forma $a + bi$.

6. V/F — corrige as falsas: a) $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ · b) todo o número real é um número complexo · c) existem números complexos que não são números reais · d) a equação $x^2 + 1 = 0$ tem soluções em $\mathbb{R}$ · e) $i^2 = -1$ · f) $i^{100} = 1$

7. Parâmetro: determina os valores de $k \in \mathbb{R}$ para os quais a equação $x^2 + kx + 9 = 0$ não tem raízes reais.

8. Verificação: mostra que $3i$ é solução da equação $x^2 + 9 = 0$ e indica a outra solução.

9. Construção: escreve uma equação do 2.º grau, de coeficientes reais, cujas soluções sejam $2i$ e $-2i$.

10. Cálculo: calcula a) $(i^5)^2 \cdot b$ b) $i^3 \times i^7 \cdot c$ c) $(2i)^3$

11. Justificação: explica por que razão a equação $x^2 + 1 = 0$ não tem solução em $\mathbb{R}$, mas tem solução em $\mathbb{C}$, e indica as duas soluções.

12. (Python) O programa seguinte resolve uma equação do 2.º grau $ax^2 + bx + c = 0$ no conjunto $\mathbb{C}$. Executa-o para $a = 1$, $b = 2$ e $c = 5$ e indica exatamente o que é impresso.

```
import cmath

a = float(input('a? '))
b = float(input('b? '))
c = float(input('c? '))
delta = b**2 - 4*a*c

if delta == 0:
    print('Uma solução real:', -b/(2*a))
else:
    r = cmath.sqrt(delta)
    print('Soluções:', (-b-r)/(2*a), 'e', (-b+r)/(2*a))
```

Dica: antes de calcular, identifica sempre o valor de Δ — é ele que decide se as raízes são reais ou complexas. E cuidado com o sinal: em $x^2 + kx + 9 = 0$ tem-se $b = k$ e $c = 9$, logo $\Delta = k^2 - 36$.

Soluções — Números complexos: a unidade imaginária

1. $i^0 = 1 \cdot i^1 = i \cdot i^2 = -1 \cdot i^3 = -i \cdot i^4 = 1 \cdot i^5 = i \cdot i^6 = -1 \cdot i^7 = -i \cdot i^8 = 1$. O padrão $1, i, -1, -i$ repete-se em ciclos de 4 potências: as potências de i dependem apenas do resto da divisão do expoente por 4.

2. a) $17 = 4 \times 4 + 1$ (resto 1) $\rightarrow i^{17} = i \cdot i$ b) $30 = 4 \times 7 + 2$ (resto 2) $\rightarrow i^{30} = -1 \cdot i$ c) $101 = 4 \times 25 + 1$ (resto 1) $\rightarrow i^{101} = i \cdot i$ d) $2026 = 4 \times 506 + 2$ (resto 2) $\rightarrow i^{2026} = -1$.

3. a) $x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -9$. Em $\mathbb{R}$: **conjunto-solução vazio**, porque nenhum número real tem quadrado negativo. Em $\mathbb{C}$: $x = 3i$ ou $x = -3i$. b) $x^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -5$. Em $\mathbb{R}$: $\emptyset$. Em $\mathbb{C}$: $x = i\sqrt{5}$ ou $x = -i\sqrt{5}$.

4. $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 5 = 4 - 20 = -16$. Como $\Delta < 0$, não há raízes reais. $\sqrt{(-\Delta)} = \sqrt{16} = 4$, logo $x = (-2 \pm 4i)/2 \rightarrow x = -1 + 2i$ ou $x = -1 - 2i$.

5. $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 5 = 16 - 40 = -24$. $\sqrt{(-\Delta)} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$, logo $x = (4 \pm 2\sqrt{6}i)/4 \rightarrow x = 1 + (\sqrt{6}/2)i$ ou $x = 1 - (\sqrt{6}/2)i$ (note-se que $2\sqrt{6}/4 = \sqrt{6}/2$).

6. a) $V \cdot b) V$ (escreve-se $a + 0i$) $\cdot c) V$ (por exemplo i) $\cdot d) F$ — $x^2 + 1 = 0$ não tem raízes reais, porque $x^2 + 1 \geq 1$ para todo o x real; tem as soluções complexas i e $-i$ $\cdot e) V$ (é a definição da unidade imaginária) $\cdot f) V$ — $100 = 4 \times 25$, resto 0, logo $i^{100} = (i^4)^{25} = 1$.

7. $\Delta = k^2 - 4 \times 1 \times 9 = k^2 - 36$. Não haver raízes reais exige $\Delta < 0$: $k^2 - 36 < 0 \Leftrightarrow k^2 < 36 \Leftrightarrow -6 < k < 6$.

8. Substituindo: $(3i)^2 + 9 = 9i^2 + 9 = 9 \times (-1) + 9 = -9 + 9 = 0$, logo $3i$ é solução. A outra solução é $-3i$ (as raízes são conjugadas).

9. Se as soluções são $2i$ e $-2i$, a equação é $(x - 2i)(x + 2i) = 0 \Leftrightarrow x^2 - (2i)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4 = 0$ (os coeficientes são reais, como pedido, pois $(2i)(-2i) = -4i^2 = 4$).

10. a) $i^5 = i$, logo $(i^5)^2 = i^2 = -1 \cdot b) i^3 \times i^7 = i^{10} = (i^4)^2 \times i^2 = 1 \times (-1) = -1 \cdot c) (2i)^3 = 2^3 i^3 = 8 \times (-i) = -8i$.

11. Em $\mathbb{R}$, $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$, o que é impossível porque o quadrado de um número real é sempre ≥ 0 — para todo o x real se tem $x^2 + 1 \geq 1$. Em $\mathbb{C}$ existe um número cujo quadrado é -1 , a unidade imaginária i (pois $i^2 = -1$), pelo que as duas soluções são $x = i$ e $x = -i$. O conjunto $\mathbb{C}$ foi precisamente construído para dar solução a equações deste tipo.

12. Com $a = 1$, $b = 2$ e $c = 5$ tem-se $\Delta = 4 - 20 = -16$, o programa segue o ramo *else* e imprime: **Soluções: (-1-2j) e (-1+2j)**. Confirmam-se as soluções da questão 4: $-1 - 2i$ e $-1 + 2i$ (na linguagem Python a unidade imaginária escreve-se *j*, mas representa exatamente o mesmo número).

Nota: em $\mathbb{C}$ nunca escrevas uma resposta como « $x^2 = -9$ não tem solução» sem dizer *em que conjunto estás a resolver* — em $\mathbb{R}$ o conjunto-solução é vazio, em $\mathbb{C}$ tem duas soluções. E lembra-te de que as potências de i se resolvem sempre por divisão inteira do expoente por 4.