

Teste de Matemática — Números complexos: forma trigonométrica

12.º Ano

Matemática A

10 questões

20 valores

3 páginas

Instruções: apresenta todos os cálculos e indica sempre o módulo e o argumento antes de aplicar qualquer operação na forma trigonométrica. Nos lugares geométricos, descreve a figura com o centro e o raio. Duração: 90 minutos.

Grupo I — Módulo, argumento e forma trigonométrica

1. (2 valores) Determina o módulo e o argumento principal de $z = -1 + i$.

2. (2 valores) Escreve na forma trigonométrica $\rho \operatorname{cis} \theta$ o número complexo $z = 2 - 2i$.

3. (2 valores) Escreve na forma algébrica $a + bi$ o número complexo $z = 3 \operatorname{cis}(5\pi/6)$.

4. (2 valores) Determina o número complexo z tal que $|z| = 4$ e $\arg z = \pi/3$, apresentando-o na forma algébrica.

Grupo II — Operações na forma trigonométrica

5. (2 valores) Calcula $\text{cis}(\pi/6) \times \text{cis}(\pi/3)$ e apresenta o resultado na forma algébrica.

6. (2 valores) Calcula $(2 \text{ cis}(\pi/5))^5$, usando a fórmula de De Moivre.

7. (2 valores) Calcula $(6 \text{ cis}(2\pi/3)) / (3 \text{ cis}(\pi/6))$ e apresenta o resultado na forma algébrica.

Grupo III — Radiciação e conjuntos em $\mathbb{C}$

8. (2 valores) Determina as raízes cúbicas de 27 e indica o conjunto dos seus afijos no plano complexo.

9. (2 valores) Identifica e descreve o conjunto dos afijos dos números complexos z tais que $|z - 2i| = 3$.

10. (2 valores) O programa seguinte devolve o módulo e o argumento de um número complexo. Executa-o para $z = -1 + 1j$ e indica exatamente o que é impresso, comparando os valores com os obtidos na questão 1.

```
import cmath

z = complex(input('z (a+bj)? '))
r, t = cmath.polar(z)

print('Módulo:', round(r, 3))
print('Argumento:', round(t, 3))
```

Fim da prova. Total: 20 valores.

Soluções e critérios de classificação

1. (2 v) $p = |-1 + i| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$. O afixo $(-1, 1)$ está no 2.º quadrante e $\operatorname{tg} \theta = -1$, logo $\theta = 3\pi/4$. Assim $z = \sqrt{2} \operatorname{cis}(3\pi/4)$.
 2. (2 v) $p = |2 - 2i| = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$. O afixo $(2, -2)$ está no 4.º quadrante e $\operatorname{tg} \theta = -1$, logo $\theta = 7\pi/4$. Portanto $z = 2\sqrt{2} \operatorname{cis}(7\pi/4)$. (O argumento $7\pi/4$ e não $\pi/4$, precisamente por causa do quadrante.)
 3. (2 v) $z = 3(\cos 5\pi/6 + i \sin 5\pi/6) = 3(-\sqrt{3}/2 + i \times 1/2) = (-3\sqrt{3}/2) + (3/2)i$ (aproximadamente $-2,598 + 1,5i$).
 4. (2 v) $z = 4(\cos \pi/3 + i \sin \pi/3) = 4(1/2 + i\sqrt{3}/2) = 2 + 2\sqrt{3}i$. Verificação: $|2 + 2\sqrt{3}i| = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4 \checkmark$
 5. (2 v) Multiplicando, os módulos multiplicam-se e os argumentos somam-se: $\operatorname{cis}(\pi/6) \times \operatorname{cis}(\pi/3) = 1 \times 1 \operatorname{cis}(\pi/6 + \pi/3) = \operatorname{cis}(\pi/2)$. Como $\operatorname{cis}(\pi/2) = \cos \pi/2 + i \sin \pi/2 = 0 + i$, o resultado é i .
 6. (2 v) Pela fórmula de De Moivre: $(2 \operatorname{cis}(\pi/5))^5 = 2^5 \operatorname{cis}(5 \times \pi/5) = 32 \operatorname{cis}(\pi) = 32 \times (-1 + 0i) = -32$.
 7. (2 v) Na divisão, os módulos dividem-se e os argumentos subtraem-se: $(6/3) \operatorname{cis}(2\pi/3 - \pi/6) = 2 \operatorname{cis}(4\pi/6 - \pi/6) = 2 \operatorname{cis}(\pi/2)$. Como $\operatorname{cis}(\pi/2) = i$, o resultado é $2i$.
 8. (2 v) Escrevendo $27 = 27 \operatorname{cis}(0)$, as raízes cúbicas são $w_k = 27^{1/3} \operatorname{cis}((0 + 2k\pi)/3) = 3 \operatorname{cis}(2k\pi/3)$, com $k = 0, 1, 2$: **3, $3 \operatorname{cis}(2\pi/3) = -3/2 + (3\sqrt{3}/2)i$ e $3 \operatorname{cis}(4\pi/3) = -3/2 - (3\sqrt{3}/2)i$** . Os três afijos têm módulo 3 — estão todos na circunferência de centro na origem e raio 3 — e os seus argumentos estão espaçados de $2\pi/3$: formam os vértices de um **triângulo equilátero inscrito** nessa circunferência.
 9. (2 v) $|z - 2i| = 3$ significa que a distância do afixo de z ao afixo de $2i$ (o ponto $(0, 2)$) é igual a 3. O conjunto é a **circunferência de centro no ponto $(0, 2)$ e raio 3** — isto é, a circunferência de centro no afixo de $2i$ e raio 3, e não a circunferência de centro na origem.
 10. (2 v) Com $z = -1 + 1j$ o programa imprime: **Módulo: 1.414 e Argumento: 2.356**. Os valores confirmam a questão 1: o módulo é $\sqrt{2} \approx 1,4142$ (arredondado a três casas) e o argumento é $3\pi/4 \approx 2,3562$ radianos. Repara que *cmath.polar* devolve o argumento em **radianos**, no intervalo $]-\pi, \pi]$, pelo que o ângulo aparece como 2,356 (equivalente a 135°) e não como uma fração de π .
- Crítérios:** em cada questão a cotação reparte-se pelo *processo* (determinação do módulo e do argumento, identificação do quadrante, aplicação da regra dos argumentos) e pelo *resultado*. Na questão 8 exigem-se as três raízes e a identificação do triângulo equilátero; na questão 9 exige-se a indicação do centro e do raio; na questão 2 é penalizado o erro de quadrante no argumento.