

Ficha 7 — Números complexos: operações e radiciação

12.º Ano

Matemática A

4 páginas

12 exercícios

Objetivo: efetuar multiplicações, divisões e potências na forma trigonométrica (fórmula de De Moivre), determinar raízes n -ésimas de um número complexo e resolver equações simples e conjuntos de pontos definidos por condições na variável complexa.

Revisão rápida — operações, De Moivre e radiciação

- **Multiplificação:** com $z = \rho_1 \operatorname{cis} \theta_1$ e $w = \rho_2 \operatorname{cis} \theta_2$ tem-se $zw = \rho_1 \rho_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$ — os módulos *multiplicam-se* e os argumentos *somam-se*.
- **Divisão** (com $w \neq 0$): $z/w = (\rho_1/\rho_2) \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)$ — os módulos *dividem-se* e os argumentos *subtraem-se*.
- **Fórmula de De Moivre (potenciação):** para n inteiro, $z^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$. É o instrumento natural para potências altas: evita expandir produtos como $(1 + i)^8$.
- **Radiciação — raízes n -ésimas:** as n raízes n -ésimas de $z = \rho \operatorname{cis} \theta$ são $w_k = \rho^{1/n} \operatorname{cis}((\theta + 2k\pi)/n)$, com $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$. Todas têm o mesmo módulo $\rho^{1/n}$ e os seus argumentos estão espaçados de $2\pi/n$.
- **Leitura geométrica:** os afijos das n raízes são os vértices de um **polígono regular de n lados** inscrito na circunferência de centro na origem e raio $\rho^{1/n}$.
- **Raízes da unidade:** as raízes de $z^n = 1$ têm módulo **1** e argumentos $2k\pi/n$ — formam um polígono regular inscrito na circunferência trigonométrica.
- **Conjuntos definidos por condições:** $|z - z_0| = r$ (com $r > 0$) descreve a **circunferência de centro no afixo de z_0 e raio r** ; $|z - z_0| < r$ descreve o interior dessa circunferência.

Exercícios

1. Multiplificação: para $z = 2 \operatorname{cis}(\pi/4)$ e $w = 3 \operatorname{cis}(\pi/6)$, calcula zw e apresenta o resultado na forma trigonométrica.

2. Divisão: para $z = 6 \operatorname{cis}(2\pi/3)$ e $w = 2 \operatorname{cis}(\pi/4)$, calcula z/w na forma trigonométrica.

3. De Moivre: calcula $(1 + i)^8$, passando $z = 1 + i$ à forma trigonométrica.

4. De Moivre: calcula $(\sqrt{3} + i)^6$.

5. Potência: calcula $(1 - i)^4$.

6. Divisão para a forma algébrica: calcula $(4 \operatorname{cis}(\pi/3)) / (2 \operatorname{cis}(\pi/6))$ e apresenta o resultado na forma $a + bi$.

7. Raízes quadradas: determina as duas raízes quadradas de $z = 4 \operatorname{cis}(\pi/3)$.

8. Raízes cúbicas: determina as três raízes cúbicas de 8. Mostra que os seus afijos são os vértices de um triângulo equilátero.

9. Raízes da unidade: resolve, em $\mathbb{C}$, a equação $z^3 = 1$.

10. Equação em $\mathbb{C}$: resolve a equação $z^2 + 16 = 0$.

11. Conjunto de pontos: identifica e descreve o conjunto dos afijos dos números complexos z tais que $|z - 1| = 2$.

12. (Python) O programa seguinte calcula as n raízes n -ésimas de um número complexo dado pelo módulo e pelo argumento. Executa-o para $\rho = 4$, $\theta = \pi/3$ e $n = 2$ e indica exatamente o que é impresso.

```
import math

rho = float(input('rho? '))
t = float(input('theta (rad)? '))
n = int(input('n? '))

r = rho ** (1 / n)
print('Raizes:')
for k in range(n):
    ang = (t + 2 * math.pi * k) / n
    a = round(r * math.cos(ang), 3)
    b = round(r * math.sin(ang), 3)
    sinal = '+' if b >= 0 else '-'
    print(' ', a, sinal, abs(b), 'i')
```

Dica: na radiciação **não te esqueças do «+ 2kπ»** — é ele que gera as n raízes distintas. Erro típico: dividir o argumento por n e devolver uma só raiz. E confirma sempre no fim que todas as raízes têm o mesmo módulo: se não tiverem, houve um erro de cálculo.

Soluções — Operações e radiciação

1. $zw = (2 \times 3) \operatorname{cis}(\pi/4 + \pi/6) = \mathbf{6 \operatorname{cis}(5\pi/12)}$. Os módulos multiplicaram-se e os argumentos somaram-se ($\pi/4 + \pi/6 = 3\pi/12 + 2\pi/12 = 5\pi/12$).
 2. $z/w = (6/2) \operatorname{cis}(2\pi/3 - \pi/4) = \mathbf{3 \operatorname{cis}(5\pi/12)}$ ($2\pi/3 - \pi/4 = 8\pi/12 - 3\pi/12 = 5\pi/12$).
 3. $1 + i$ tem módulo $\sqrt{2}$ e argumento $\pi/4$, logo $1 + i = \sqrt{2} \operatorname{cis}(\pi/4)$. Por De Moivre: $(1 + i)^8 = (\sqrt{2})^8 \operatorname{cis}(8 \times \pi/4) = 16 \operatorname{cis}(2\pi) = \mathbf{16}$. (Verificação algébrica: $(1 + i)^2 = 2i$, $(2i)^4 = 16i^4 = 16 \checkmark$)
 4. $\sqrt{3} + i$ tem módulo $\sqrt{3 + 1} = 2$ e argumento $\pi/6$ ($\cos \theta = \sqrt{3}/2$ e $\sin \theta = 1/2$), logo $\sqrt{3} + i = 2 \operatorname{cis}(\pi/6)$. Então $(\sqrt{3} + i)^6 = 2^6 \operatorname{cis}(6 \times \pi/6) = 64 \operatorname{cis}(\pi) = \mathbf{-64}$.
 5. $1 - i$ tem módulo $\sqrt{2}$ e argumento $-\pi/4$ (está no 4.º quadrante), logo $1 - i = \sqrt{2} \operatorname{cis}(-\pi/4)$. Então $(1 - i)^4 = (\sqrt{2})^4 \operatorname{cis}(-\pi) = 4 \operatorname{cis}(-\pi) = \mathbf{-4}$.
 6. $(4 \operatorname{cis}(\pi/3)) / (2 \operatorname{cis}(\pi/6)) = (4/2) \operatorname{cis}(\pi/3 - \pi/6) = 2 \operatorname{cis}(\pi/6) = 2(\sqrt{3}/2 + i \times 1/2) = \mathbf{\sqrt{3} + i}$ (aproximadamente $1,732 + i$).
 7. As duas raízes quadradas de $4 \operatorname{cis}(\pi/3)$ são $w_k = 4^{1/2} \operatorname{cis}((\pi/3 + 2k\pi)/2)$, com $k = 0, 1$: $k = 0 \rightarrow 2 \operatorname{cis}(\pi/6) = \mathbf{\sqrt{3} + i}$; $k = 1 \rightarrow 2 \operatorname{cis}(7\pi/6) = \mathbf{-\sqrt{3} - i}$. As duas raízes são simétricas em relação à origem e têm módulo 2.
 8. Escrevendo $8 = 8 \operatorname{cis}(0)$, as raízes cúbicas são $w_k = 8^{1/3} \operatorname{cis}(2k\pi/3)$, $k = 0, 1, 2$: $\mathbf{2}$, $\mathbf{-1 + \sqrt{3}i}$ e $\mathbf{-1 - \sqrt{3}i}$. Os três afixos têm módulo 2 (logo estão todos na circunferência de centro na origem e raio 2) e os argumentos estão espaçados de $2\pi/3$ — os vértices de um triângulo equilátero inscrito nessa circunferência.
 9. As raízes de $z^3 = 1$ (isto é, de $z^3 = 1 \operatorname{cis}(0)$) têm módulo 1 e argumentos $2k\pi/3$, com $k = 0, 1, 2$: $z = \mathbf{1}$, $z = \mathbf{\operatorname{cis}(2\pi/3) = -1/2 + (\sqrt{3}/2)i}$ e $z = \mathbf{\operatorname{cis}(4\pi/3) = -1/2 - (\sqrt{3}/2)i}$. Os três afixos formam um triângulo equilátero inscrito na circunferência trigonométrica. Todas as raízes verificam $z^3 = 1$.
 10. $z^2 + 16 = 0$ equivale a $z^2 = -16$. Escrevendo $\mathbf{-16 = 16 \operatorname{cis}(\pi)}$, as raízes quadradas são $4 \operatorname{cis}(\pi/2) = \mathbf{4i}$ e $4 \operatorname{cis}(3\pi/2) = \mathbf{-4i}$, isto é, $\mathbf{z = \pm 4i}$. Verificação: $(4i)^2 = 16i^2 = -16 \checkmark$ e $(-4i)^2 = 16i^2 = -16 \checkmark$.
 11. $|z - 1| = 2$ significa que a distância do afixo de z ao afixo de 1 (o ponto $(1, 0)$) é igual a 2. O conjunto é, portanto, a **circunferência de centro no ponto $(1, 0)$ e raio 2**. Note-se que o conjunto das soluções é formado por *todos* os complexos cujo afixo está a distância 2 do ponto $(1, 0)$, e não apenas pelos números reais.
 12. Com $\rho = 4$, $\theta = \pi/3$ e $n = 2$ o programa imprime: **Raízes:** e, nas linhas seguintes, $\mathbf{1.732 + 1.0i}$ e $\mathbf{-1.732 - 1.0i}$. Estes valores são precisamente as duas raízes quadradas obtidas na questão 7 ($\sqrt{3} + i$ e $-\sqrt{3} - i$), arredondadas a três casas decimais. O programa reconhece que o coeficiente é negativo e imprime o sinal «-» antes do valor absoluto, para que o resultado se leia como uma forma algébrica correta.
- Nota:** na forma trigonométrica, **multiplicar é somar argumentos e elevar é multiplicar o argumento pelo expoente**; na radiciação, é o « $+ 2k\pi$ » que produz as n raízes distintas. O número de raízes n -ésimas de um complexo não nulo é sempre exatamente n .